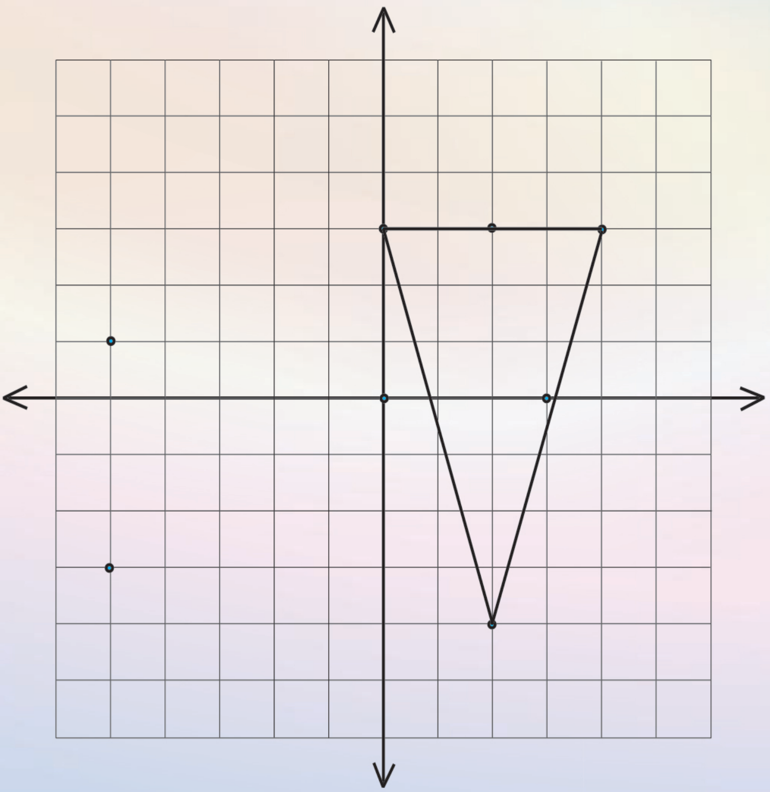
الجمهورية اليمنية
وزارة التربية والتعليم
قطاع المناهج والتوجيه
الإدارة العامة للمناهج

الرياضيات

للصف السابع من مرحلة التعليم الأساسي



١٤٣٨هـ - ٢٠١٧م

الجمهورية اليمنية
وزارة التربية والتعليم
قطاع المناهج والتوجيه
الإدارة العامة للمناهج

الرياضيات

للصف السابع من مرحلة التعليم الأساسي

فريق التأليف

د/ شكيب محمد باجرش (رئيساً).

د/ أمة الإله علي حُمد الحوري.
د/ ردمان محمد سعيد.
د/ منصور عطاء.
د/ علي شاهر نعمان القرشي.
د/ محمد عبد الرب محمد بشر (منسقا).
د/ عبدالله سلطان عبد الغني.
د/ علي عبده عبدالواحد.
د/ محمد علي مرشد.
أ/ يحيى بكار مصفر.
أ/ سالمين محمد باسلوم.
أ/ ذا النون سعيد طه.
أ/ عبد الباري طه.
أ/ مصطفى عبد الواحد.
أ/ عبده أحمد سيف.
أ/ أحمد سالم باحويرث.
أ/ جميلة إبراهيم أحمد.
أ/ مريم عبد الجبار.

فريق المراجعة:

أ/ جميلة إبراهيم أحمد.
أ/ شرف عثمان الخامري.
أ/ تهاني سعيد الحكيمي.
أ/ مختار حيدر هزاع.

تنسيق: أ/ سعيد محمد ناجي الشرعبي.

تدقيق: د. محمد عبدالرب بشر.

إشراف: د. عبدالله سلطان الصلاحي.

الإخراج الفني

الصف والتصميم: علي عبد الله السلفي.
جلال سلطان علي.

صور ورسوم: عبد الجبار محسن مسعود.
محمد حسين الذماري.

تدقيق التصميم : حامد عبدالعالم الشيباني.

١٤٣٨هـ – ٢٠١٧م

النشيد الوطني

رددي أيتها الدنيا نشيدي ردديه وأعيدي وأعيدي
واذكري في فرحتي كل شهيدِ وامنحيه حُللاً مِنْ ضوءِ عيدي

رددي أيتها الدنيا نشيدي
رددي أيتها الدنيا نشيدي

وحدتي .. وحدتي .. يا نشيداً رائعاً يملأ نفسي أنت عهدٌ عالقٌ في كل ذِمَّة
رايتي .. رايتي .. يا نسيجاً حِكْتُهُ من كل شمس اخْلُدِي خَافِقَةً في كل قِمَّة
أمتي .. أمتي .. اِمنحيني البأس يا مصدر بأسي واذخُريني لَكِ يا أكرمُ أمة

عشتُ إيماني وحبّي أمميًا
ومسيري فوق دربي عربيا
وسيبقى نبضُ قلبي يمنيا
لن ترى الدنيا على أرضي وصيا

المصدر: قانون رقم (٣٦) لسنة ٢٠٠٦م بشأن السلام الجمهوري ونشيد الدولة الوطني للجمهورية اليمنية

أعضاء اللجنة العليا للمناهج

أ. د. عبدالرزاق يحيى الأشول.

د/ عبدالله عبده الحامدي.
د/ عبدالله سالم لملس.
أ/ أحمد عبدالله أحمد.
د/ فضل أحمد ناصر مطلي.
د/ صالح ناصر الصوفي.
د/ محمد عمر سالم باسليم.
أ.د/ داوود عبدالملك الحدابي.
أ.د/ محمد حاتم المخلافي.
أ.د/ محمد عبدالله الصوفي.
د/ عبده أحمد علي النزيلي.
أ/ محمد عبدالله زبارة.

أ/ عبدالكريم محمد الجنداري.
أ/ علي حسين الحيمي.
د/ إشراق هائل عبدالجليل الحكيمي.
أ/ محسن صالح حسين اليافعي.
د/ أحمد علي المعمري.
أ.د/ محمد سرحان سعيد المخلافي.
أ.د/ شكيب محمد باجرش.
أ.د/ صالح عوض عرم.
أ.د/ أنيس أحمد عبدالله طائع.
أ.د/ إبراهيم محمد الحوثي.
أ/ عبدالله علي إسماعيل الرازحي.

د. عبدالله سلطان الصلاحي.

بسم الله الرحمن الرحيم

تقديم

في إطار تنفيذ التوجهات الرامية للاهتمام بنوعية التعليم وتحسين مخرجاته تلبية للاحتياجات ووفقاً للمتطلبات الوطنية.

فقد حرصت وزارة التربية والتعليم في إطار توجهاتها الإستراتيجية لتطوير التعليم الأساسي والثانوي على إعطاء أولوية استثنائية لتطوير المناهج الدراسية، كونها جوهر العملية التعليمية وعملية ديناميكية تتسم بالتجديد والتغيير المستمرين لاستيعاب التطورات المتسارعة التي تسود عالم اليوم في جميع المجالات.

ومن هذا المنطلق يأتي إصدار هذا الكتاب في طبعته المعدلة ضمن سلسلة الكتب الدراسية التي تم تعديلها وتنقيحها في عدد من صفوف المرحلتين الأساسية والثانوية لتحسين وتجويد الكتاب المدرسي شكلاً ومضموناً، لتحقيق الأهداف المرجوة منه، اعتماداً على العديد من المصادر أهمها: الملاحظات الميدانية، والمراجعات المكتبية لتلافي أوجه القصور، وتحديث المعلومات وبمايتناسب مع قدرات المتعلم ومستواه العمري، وتحقيق الترابط بين المواد الدراسية المقررة، فضلاً عن إعادة تصميم الكتاب فنياً وجعله عنصراً مشوقاً وجذاباً للمتعلم وخصوصاً تلاميذ الصفوف الأولى من مرحلة التعليم الأساسي.

ويعد هذا الإنجاز خطوة أولى ضمن مشروعنا التطويري المستمر للمناهج الدراسية ستتبعها خطوات أكثر شمولية في الأعوام القادمة، وقد تم تنفيذ ذلك بفضل الجهود الكبيرة التي بذلها مجموعة من ذوي الخبرة والاختصاص في وزارة التربية والتعليم والجامعات من الذين أنضجتهم التجربة وصقلهم الميدان برعاية كاملة من قيادة الوزارة والجهات المختصة فيها.

ونؤكد أن وزارة التربية والتعليم لن تتوانى عن السير بخطى حثيثة ومدروسة لتحقيق أهدافها الرامية إلى تنوير الجيل وتسليحه بالعلم وبناء شخصيته المتزنة والمتكاملة القادرة على الإسهام الفاعل في بناء الوطن اليمني الحديث والتعامل الإيجابي مع كافة التطورات العصرية المتسارعة والمتغيرات المحلية والإقليمية والدولية.

وزير التربية والتعليم

رئيس اللجنة العليا للمناهج

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة

الحمد لله رب العالمين ، والصلاة والسلام على خاتم النبيين ، وآله وصحبه أجمعين .

لقد حرصت وزارة التربية والتعليم على تطوير المناهج التعليمية لمرحلة التعليم الأساسي وفق أسس علمية وتربوية . . ويأتي كتاب الرياضيات للصف السابع في موكب هذا التطوير .

وفي هذا الكتاب يجد أبناؤنا الطلبة مادة الرياضيات معروضة لهم بأساليب وقوالب جديدة تساعدهم على سرعة الفهم والاستيعاب، وتسهل لهم التعامل مع المادة وتحفزهم على حبها، كما تنمي فيهم القدرات التفكيرية الثقافة العلمية المتوسعة .

إن الكتاب غنى بالشرح والأمثلة إلى جانب الأنشطة والتدريب لكل درس، والتمارين العامة لكل وحدة دراسية ؛ ولذا على أبنائنا الطلبة بذل أقصى جهودهم والاستفادة من توجيهات المدرسين ، والدراسة المتمعنة للمادة المقدمة وتتبعها بدقة وحل أكبر قدر من التمارين والمسائل ؛ وهذا من شأنه ترسيخ المعرفة الرياضية في أذهانهم وإكسابهم المهارات الكافية للاستمرار في التعلم .

وفي هذا الكتاب نقدم لأبنائنا الطلبة مادة الرياضيات بدقة علمية مع مراعاة جوانبها التربوية، ولذا تضمنت وحدات الكتاب تعاريف رياضية دقيقة ولكنها مبسطة ، واحتوت على برهنة رياضية ولكنها متدرجة . وترابطت المواضيع في بناء منطقي متسلسل يساعد أبناءنا على التقدم الراسخ في تعلم المادة .

كل ذلك قدمناه بلغة مبسطة مشوقة، مدعومة بالأشكال والتوضيحات الكافية ترغيباً لهم في المادة ، وعلى طريق تحقيق الطموح العلمي المنشود .

كما عليك عزيزي المعلم / المعلمة تدريس موضوعات الجبر والهندسة بشكل متوازي من بداية العام الدراسي بما يحقق التكامل بين الموضوعات .

والله من وراء القصد، وهو ولي التوفيق .

المؤلفون

المحتويات

تابع المحتويات

المـــوضــــــوع | الصفحة

الوحدة الثالثة : الحدود الجبرية

الوحدة الرابعة : المعادلات والمتراجحات

تابع المحتويات

المـــوضـــــوع | الصفحة

الوحدة الخامسة : الهندسـة

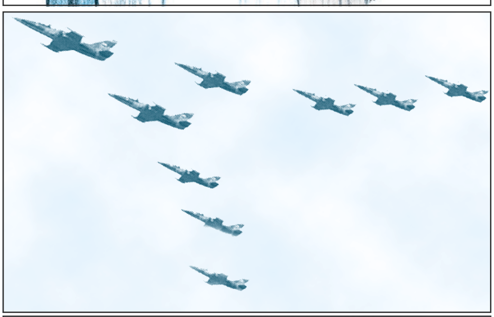
الوحدة السادسة : القياس

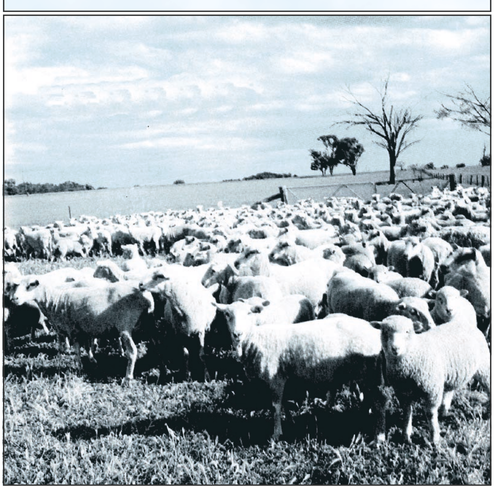
تابع المحتويات

الوحدة الأولى

المجموعات والعلاقات

١ : ١ المجموعة والعنصر





تأمل الكلمات التي تحتها خط في الجمل التالية :

احتفلت أسرتي بنجاحي إلى الصف السابع .

هل شاهدت سرباً من الطائرات ؟

ترعى أم سلمى قطيعاً من الأغنام في مزرعتها .

تلاحظ أنَّ كلاً منها يدل على تجمّع من الأشياء . هذا التجمّع يطلق عليه بالمفهوم الرياضي لفظ "مجموعة"

فكلمة " أسرة " تدل على مجموعة من الأفراد .

وكلمة "سرب" تدل على مجموعة من الطائرات .

وتدل كلمة "قطيع" على مجموعة من الأغنام .

فلفظ "مجموعة" يدل على تجمّع من الأشياء سواء كانت هذه الأشياء أفراداً أو طائرات أو أغنام . . .إلخ، بشرط أن تكون هذه الأشياء محدّدة تحديداً تاماً .

والأشياء التي تتكوّن منها المجموعة تسمى "عناصر" ؛ فمثلاً :

مجموعة الخلفاء الراشدين عناصرها : أبو بكر، عمر، عثمان، علي .

وعناصر مجموعة ألوان علم الجمهورية اليمنية هي : الأحمر، الأبيض، الأسود .

تدريب (١)

اذكر عناصر مجموعة أرقام العدد ٩٤٥

وإذا كان التجمّع من أشياء غير محدّدة تحديداً تاماً فلا يصح أن نطلق عليه لفظ "مجموعة" ؛ فمثلاً :

"الأشجار الجميلة" تجمّع لا يدل على مجموعة ، لأن صفة الجمال تختلف من شخص إلى آخر فتصبح غير محددة .

ولا تمثل "التمارين الصعبة في هذا الكتاب" مجموعة ، لأنها تختلف في درجة صعوبتها من طالب لآخر ؛ فالتمرين الصعب لدى زميلك قد لا يكون صعباً لديك .

تدريب (٢)

اذكر عناصر كلٍّ من المجموعات التالية :

أ) مجموعة أسماء الطلبة في فصلك الذين تبدأ أسماؤهم بحرف ع

هل اسمك عنصر في هذه المجموعة؟

ب) مجموعة المواد الدراسية التي تتعلمها هذا العام .

الانتماء :

تعلّمت أن عناصر مجموعة أرقام العدد ٢٧٤ هي ٤ ، ٧ ، ٢

تلاحظ أن الرقم **٤** عنصراً من عناصر هذه المجموعة، فنقول إنَّ :

٤ **ينتمي إلى** مجموعة أرقام العدد ٢٧٤

ونكتب ذلك رمزياً ٤ $\in$ مجموعة أرقام العدد ٢٧٤ ،

فالرمز ($\in$) يعبر عن الانتماء ، ويقرأ «**ينتمي إلى**» .

بينما الرقم ٨ ليس عنصراً من عناصر هذه المجموعة فنقول إنَّ :

٨ لا ينتمي إلى مجموعة أرقام العدد ٢٧٤

ونكتب ذلك رمزياً ٨ $\not\ni$ مجموعة أرقام العدد ٢٧٤

فالرمز ($\not\ni$) يعبّر عن عدم الانتماء ويقرأ (**لا ينتمي إلى**) .

فمثلاً: اليمن $\ni$ مجموعة الدول العربية ، بينما الصين $\not\ni$ مجموعة الدول العربية .

تدريب (٣)

اذكر عنصراً ينتمي إلى مجموعة حروف كلمة "**الرياضيات**" وآخرَ لا ينتمي .

تمارين ومسائل

[١] أي العبارات التالية تدل على مجموعة ، وأياً منها لا تدل على مجموعة؟ :

أ) الأعداد الطبيعية التي على وجه الساعة .   ب) الطلبة الأذكياء في فصلك .

جـ) الرجال الشجعان .   ء) الحروف التي تكوِّن كلمة " تعز" .

[٢] اذكر عناصر المجموعات التالية :

أ) مجموعة أرقام العدد ١٤٧٣   ب) مجموعة حروف كلمة "مُسلم" .

جـ) مجموعة أيام الأسبوع .   ء) مجموعة الصلوات الخمس .

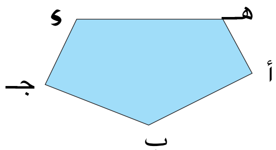
[٣] أ) اكتب خمسة عناصر من مجموعة الحروف الأبجدية .

ب) اكتب أربعة عناصر من مجموعة المحافظات اليمنية .

جـ) اكتب ثلاثة عناصر من مجموعة أشهر السنة الهجرية .

[٤] اكتب عناصر مجموعة الكسور التي بسط كل منها (٣) ومقاماتها الأعداد الطبيعية من ٥ إلى ٩ .

[٥] اكتب عناصر مجموعة رؤوس الشكل (١–١) .



شكل (١–١)

[٦] اكتب أسماء الأشكال الهندسية التالية في الشكل (١–٢) .
هل تمثّل هذه الأشكال مجموعة؟

شكل (١–٢)

[٧] ضع علامة (✓) أو (✗) في ☐ لتحصل على عبارة صحيحة فيما يلي :

أ) صعدة ∋ مجموعة محافظات الجمهورية اليمنية . ☐

ب) ٨ ∋ مجموعة الأعداد الزوجية . ☐

جـ) ١٩ ∌ مجموعة الأعداد الأولية . ☐

ء) الشرق ∋ مجموعة الجهات الأربع الأصلية . ☐

[٨] ضع الرمز ∋ أو الرمز ∌ في ☐ لتحصل على عبارة صحيحة في كل مما يلي :

أ) ١٧ ☐ مجموعة الأعداد الفردية .

ب) رمضان ☐ مجموعة الأشهر الميلادية .

جـ) س ☐ مجموعة الحروف الهجائية .

ء) ٣٥٥ ☐ مجموعة أرقام العدد ٣٥٥٢٤

[٩] أ) اذكر ثلاثة عناصر تنتمي إلى مجموعة الأعداد الزوجية .

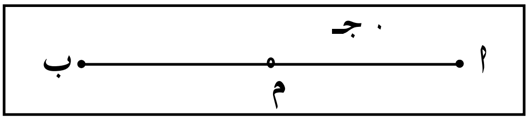
ب) اذكر عنصراً ينتمي إلى مجموعة حروف كلمة "خديجة" ، وآخرَ لا ينتمي .

[١٠] انظر إلى الشكل (١–٣) جانباً، ثم ضع علامة (✓) أو (✗) في ☐ لتحصل على عبارة صحيحة فيما يلي :

م ∈ أب ☐

جـ ∈ أب ☐

ب ∉ أب ☐



شكل (١–٣)

[١١] إذا كانت م هي مجموعة مضاعفات العدد ٣ المحصورة بين ٣ ، ٢٥

ضع في ☐ أحد الرمزين ∈ أو ∉ لتصبح العبارة صحيحة في كل مما يلي :

أ) ٦ ☐ م ب) ٩٦ ☐ م جـ) ٢٥ ☐ م

ء) ١٣ ☐ م هـ) ١٨ ☐ م و) ٠ ☐ م

١ : ٢ طرق كتابة المجموعة وتمثيلها

أ) طرق كتابة المجموعة :

غالباً ما تستخدم الحروف الهجائية لترمز للمجموعة، فيرمز للمجموعة عادة بأحد الحروف الكبيرة : س ، ص ، ع ، د ، ل، . . . ؛ كما يرمز للعنصر بأحد الحروف الصغيرة : أ ، ب ، جـ ، ء ، س ، ص ، . . . ؛حيث نكتب جميع عناصر المجموعة داخل حاصرتين بالشكل { } (تسمى الحاصرتين) ، ونضع فاصلة (،) بين كل عنصر وآخر؛ فمثلاً :

إذا رمزنا لمجموعة الأعداد الفردية الأصغر من ٩ بالرمز س ؛ فنكتب :

س = { ١ ، ٥ ، ٣، ٧ } . لاحظ أننا كتبنا العناصر بدون ترتيب .

وإذا كانت ص هي مجموعة حروف كلمة " مسلسل" ؛ فنكتب :

ص ={ م ، س، ل} . لاحظ أننا لم نكرر الحرفين س ، ل .

وتسمى هذه الطريقة كتابة المجموعة " **بطريقة السرد**" أو بذكر عناصرها .

وبشكل عام ، عندما نكتب المجموعة بطريقة السرد ، فإننا :

١ – نكتب جميع العناصر داخل الحاصرتين { } .
٢ – نضع فاصلة (،) بين كل عنصر وآخر .
٣ – نكتب كل عنصر مرة واحدة دون تكرار .
٤ – نكتب العناصر دون مراعاة لترتيبها .

مثال (١)

اكتب المجموعات التالية بطريقة السرد :

أ) س هي مجموعة حروف كلمة " **بلبل** "

ب) ع هي مجموعة أرقام العدد ٦٥٧٧

الحل :

أ) س = { ب، ل} بدون تكرار العنصرين ب ، ل

ب) ع = {٦ ، ٥ ، ٧} بدون تكرار الرقم ٧ ، بأي ترتيب نراه .

أحياناً نجد مجموعات من السهل معرفة الصفة التي تحدد عناصرها تحديداً واضحاً وتميزها عن غيرها .

فإذا كان لدينا المجموعة س= {الصيف، الشتاء، الخريف، الربيع}، تلاحظ أنها كتبت بطريقة السرد أي بذكر عناصرها، كما تلاحظ أن كل عنصر في المجموعة س فصل من فصول السنة، ولا توجد فصول أخرى للسنة .

لذا يمكن كتابة المجموعة س بطريقة أخرى كالتالي :

س هي مجموعة فصول السنة .

وتسمى هذه الطريقة : كتابة المجموعة بذكر « **الصفة المميزة** » للمجموعة .

مثال (٢)

اكتب المجموعات التالية بطريقة ذكر الصفة المميزة :

أ) صـ = { أبو بكر ، عمر ، عثمان ، علي }

ب) ل = { ٢، ٣، ٥ }

الحـل :

أ) صـ هي مجموعة الخلفاء الراشدين

ب) **ل** هي مجموعة أرقام العدد ٥٣٢

وهناك إجابات أخرى للفقرة (ب) مثل :

ل هي مجموعة الأعداد الأولية الأصغر من ٧،

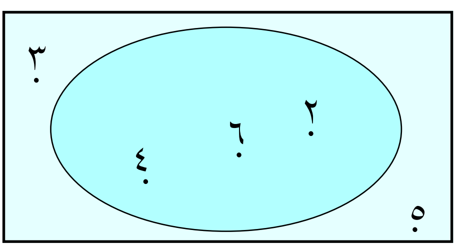
ل هي مجموعة أرقام العدد ٢٣٥ ... وهكذا

تدريب (١)

أ) اكتب بطريقة السرد مجموعة الأعداد الأولية التي تقع بين ١٣، ٢٠

ب) اكتب بطريقة الصفة المميزة المجموعة صـ = { ٠، ١، ٢، ٣، ٤ }

ب) تمثيل المجموعة بأشكال ڤن :



شـكـل (١-٤)

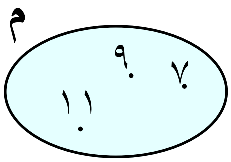
الأعداد المبينة في الشكل(١-٤) هي : ٢، ٣، ٤، ٥، ٦ فإذا أردنا تمييز مجموعة الأعـداد الزوجية من بين الأعـداد المكتوبة، نرسم منحنى مغلق تقع هذه الأعداد الزوجية بداخله ، بحيث إن كل عنصر داخل هذا المنحنى ينتمي إلى المجموعة وكل عنصر يقع خارج هذا المنحنى لا ينتمي إلى المجموعة. وهذا المنحنى أو أي شكل مغلق يسمى شكل ڤن نسبة للعالم الرياضي ڤن .

مثال (٣)

مثّل المجموعات التالية بأشكال ڤن :

أ) م = {٧، ٩، ١١} ب) ل هي مجموعة حروف كلمة " نعنع " .

الحل :



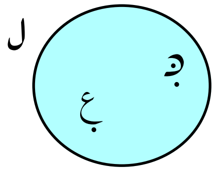
شكل (١–٥)

أ) تمثّل م = {٧، ٩، ١١} بالشكل (١–٥) :

ب) يفضل أولاً كتابة المجموعة ل بطريقة السرد .

ل = {ن ، ع}

وتمثل بالشكل (١–٦) المرسوم جانباً

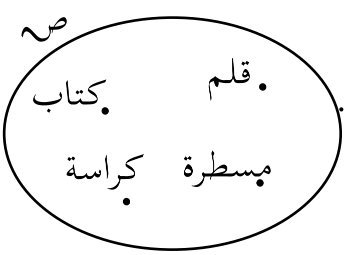


شكل (١–٦)

تدريب (٢)

١) مثّل بشكل ڤن مجموعة أرقام العدد ٧٢٧٢ .

٢) اكتب بطريقة السرد المجموعة ص التي يمثّلها الشكل (١–٧)



شكل (١–٧)

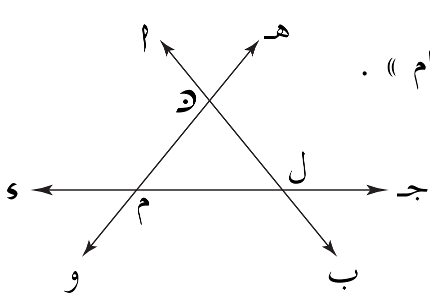
تمارين ومسائل

[١] اكتب المجموعات التالية بطريقة السرد :

أ) س هي مجموعة حروف كلمة « شباب » .

ب) ص هي مجموعة أرقام العدد ٤٧٤٧٥

جـ) ك هي مجموعة المستقيمات التي تمر بالنقطة ن في الشكل (١–٨) :



شكل (١–٨)

[٢] اكتب المجموعات التالية بذكر الصفة المميزة:

أ) ل = {اللمس ، التذوق ، الشم ، السمع ، البصر}

ب) م = {١٢، ١٤، ١٦، ١٨، ٢٠}

جـ) ع = {شمال ، جنوب ، شرق ، غرب}

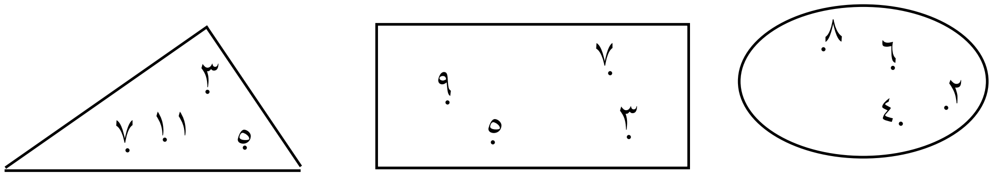
ء) د = {م ، د ، ر ، س ، ة}

[٣] مثّل المجموعات التالية بأشكال فن :

أ) س = {أ ، ب، جـ، ء} ب) ص = {٠ ، ٥، $\frac{١}{٥}$ ، ١٠، ٥,٠}

جـ) ع = { △ ، ▭ ، ○ } ء) ل = {خالد، سعد، أبو عبيدة }

[٤] اكتب بطريقة السرد المجموعات المرسومة في الشكل (١–٩) التالي :



شكل (١ – ٩)

١ : ٣ المجموعات المنتهية والمجموعات غير المنتهية

إذا كانت س هي الأعداد الأصغر من ٥ ، فإننا نكتب :

س = {٠، ١، ٢، ٣، ٤} ، وهي «**مجموعة منتهية**» .

أما إذا كانت ص هي مجموعة الأعداد الأكبر من ٥ ، فإننا نكتب :

ص = {٦، ٧ ، ٨ ، ...} .

تلاحظ عدم قدرتنا على تحديد عدد عناصرالمجموعة ص ، ولذا نكتفي بوضع ثلاث نقاط لتعني أن هناك أعداداً أخرى تتبع هذه المجموعة. ولذا نسمي هذه المجموعة «**مجموعة غير منتهية**» .

مثلاً: مجموعة الحروف الهجائية = {أ ، ب ، ت ، ... ، ي} مجموعة منتهية، لأننا نستطيع حصر عدد عناصرها؛

بينما مجموعة مضاعفات العدد ٧= {٧ ، ١٤، ٢١ ، ...} مجموعة غير منتهية، لأننا لا نستطيع تحديد عدد عناصرها .

المجموعة التي يمكن تحديد عدد عناصرها تسمى مجموعة منتهية أما المجموعة التي لا يمكن تحديد عدد عناصرها تسمى مجموعة غير منتهية.

مثال بيّن أي المجموعتين التاليتين منتهية وأيهما غير منتهية ؟

(١) مجموعة دول العالم . (٢) مجموعة الأعداد الفردية .

الحل : (١) مجموعة دول العالم مجموعة منتهية، لأن عدد هذه الدول ممكن حصره .

(٢) مجموعة الأعداد الفردية = {١ ، ٣ ، ٥ ، ...}، وهي مجموعة غير منتهية لأنه لا يمكن تحديد عدد عناصرها .

المجموعة الخالية :

تأمل المجموعات التالية :

ل مجموعة حروف كلمة " سميرة"

ص مجموعة الأعداد الزوجية الأكبر من ٢

ع مجموعة طلبة فصلك الذين تقل أعمارهم عن ٧ سنوات

فالمجموعة ل = {س، م ، ي ، ر ، ة} ، وهي مجموعة منتهية ؛

والمجموعة ص = {٤ ، ٦ ، ٨ ، ...} ، وهي مجموعة غير منتهية ؛

أما المجموعة ع فلا يمكن تحديد أي عنصر فيها ، إذ لا يوجد طالب في فصلك عمره أقل من ٧ سنوات . ومثل هذه المجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر تسمى « **مجموعة خالية** »، ويُرمز لها بالرمز ϕ (ويُقرأ فاي) . أي أن ع = ϕ أو ع = { }

فمثلاً: (١) مجموعة الدول العربية التي تقع في قارة أَستراليا مجموعة خالية، إذ لا توجد دولة عربية في قارة أستراليا .

(٢) مجموعة الأعداد الفردية التي تقبل القسمة على ٤ مجموعة خالية .

المجموعة الخالية هي المجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر ويرمز لها بالرمز " ϕ " (ويقرأ فاي) .

تمارين ومسائل

[١] بين أي المجموعات الآتية منتهية وأيها غير منتهية :

أ) مجموعة سور القرآن الكريم

ب) مجموعة الأعداد الأكبر من ١٠٠٠

جـ) مجموعة أشجار النخيل في اليمن

ء) م = { ٤٠ ، ٤٢ ، ٤٤ ، ... }

[٢] أي المجموعات التالية تكون مجموعة خالية :

أ) مجموعة المثلثات ذات الأضلاع الأربعة

ب) مجموعة الأعداد الزوجية الأصغر من ٣٥

جـ) مجموعة الطلبة في فصلك الذين تزيد أعمارهم عن ٢٥ سنة

ء) مجموعة الأعداد الفردية التي تقبل القسمة على ٢

هـ) مجموعة الأعداد الأولية المحصورة بين ٥ ، ٩

[٣] اكتب المجموعات الآتية بطريقة السرد،ثم بيّن أيها منتهية وأيها غير منتهية :

أ) مجموعة أرقام العدد ٢٢٥٥

ب) مجموعة الأعداد الطبيعية التي تقبل القسمة على ٢

جـ) مجموعة مضاعفات العدد ٥

[٤] ضع علامة (✓) أو (✗) في ☐ لتحصل على عبارة صحيحة فيما يلي :

أ) مجموعة الكتب في مكتبة مدرستك مجموعة منتهية ☐

ب) مجموعة عوامل العدد ٣٦ مجموعة منتهية ☐

جـ) مجموعة مضاعفات العدد ٣ التي تقل عن ٣٠ مجموعة غير منتهية ☐

ء) مجموعة الأعداد الطبيعية الاصغر من صفر مجموعة خالية ☐

هـ) مجموعة الأعداد الطبيعية الأكبر من ٩٠ مجموعة غير منتهية ☐

[٥] حدّد المجموعة غير المنتهية فيما يلي مع ذكر السبب :

أ) مجموعة موانئ الجمهورية اليمنية .

ب) مجموعة الدول العربية في قارة آسيا .

جـ) مجموعة الأعداد الزوجية الأكبر من ١٦

١ : ٤ تساوي المجموعات

لتكن **ل** هي مجموعة أرقام العدد ٣٧٣٥ ؛ أي أن : **ل** = {٥ ، ٣ ، ٧}

ولتكن **م** هي مجموعة الأعداد الفردية المحصورة بين ٢ ، ٩

أي أن : **م** = {٣ ، ٥ ، ٧}

تلاحظ أن : كل عنصر في المجموعة ل ينتمي إلى المجموعة م وكل عنصر في المجموعة م ينتمي إلى المجموعة **ل**

أي أن المجموعتين **ل** ، **م** لهما نفس العناصر .

نقول إنَّ: **ل** ، **م** مجموعتان متساويتان .

∴ {٥ ، ٣، ٧} = {٣ ، ٥ ، ٧}

س = ص إذا كان كل عنصر في س ينتمي إلى ص وكل عنصر في ص ينتمي الى س

مثال (١) إذا كانت س = {١ ، ٢} ، ص = {١ ، ٢ ، ٣} ،

هل س = ص ؟ ولماذا؟

الحـل: س ≠ ص ، لأن ٣ ∈ ص ، ٣ ∉ س

مثال (٢) أ) {٥ ، ٦} ≠ {١ ، ٦ ، ٥} ، لماذا؟

ب) اكتب مجموعة تساوي {أ ، ب}

الحـل:

أ) {٥ ، ٦} ≠ {١ ، ٦ ، ٥}؛ لأن ١ ∈ {١، ٦، ٥}، ١ ∉ {٥ ، ٦}

ب) {أ ، ب} = {ب ، أ}

تمارين ومسائل

[١] ضع أحد الرمزين = أو ≠ في ○ ، لتحصل على عبارة صحيحة ، واذكر السبب :

أ) {م ، ن} ○ {ن ، م}

ب) {٩ ، ١٠ ، ١١} ○ {١١ ، ٩ ، ١٠}

جـ) {٢١} ○ {١ ، ٢}

ء) {ع ، ء} ○ مجموعة حروف كلمة " عدد" .

[٢] $\{٢ ، ٣ ، ٤\} \neq \{٣٢ ، ٤\}$ ؛ لماذا؟

[٣] إذا كانت سہ = {أ ، ب ، جـ ، ء ، هـ} ، صہ = {هـ ، ء ، جـ ، ب ، أ} ،

هل سہ = صہ ؟ اذكر السبب .

[٤] لتكن : م = مجموعة أرقام العدد ٢٨٤٧٩٧

ں = مجموعة أرقام العدد ٧٩٤٢٩٨

أ) اكتب كلاً من م ، ں بطريقة السرد .

ب) هل م = ں ؟ اذكر السبب .

[٥] أكمل العناصر في المجموعات التالية لتحصل على عبارات صحيحة :

أ) {٢١ ، ٢٢ ، ١٩} = {٢٢ ، ... ، ١٩}

ب) {أ ، ب ، جـ} = {... ، جـ ، ...}

جـ) { ... ، * ، △ } = { △ ، ... ، ◯ }

ء) {٥ ، ... ، أ} = {١ ، ٥ ، أ}

هـ) مجموعة حروف كلمة "علم" = {م ، ... ، ل}

[٦] إذا كانت سہ = مجموعة أرقام العدد ٢٢٢ ، عيّن أي المجموعات التالية تساوي سہ :

أ) {٢ ، ٢٠ ، ٢٠٠}   ب) {٢٢ ، ٢٠٠}   جـ) {٢}

[٧] إذا كانت ل = مجموعة حروف كلمة "حامد"، اكتب مجموعة تساوي هذه المجموعة .

١ : ٥ المجموعة الجزئية

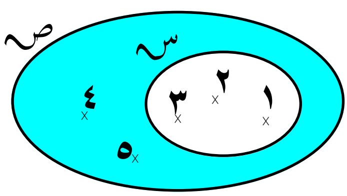
تأمل المجموعتين : س = {١ ، ٢ ، ٣} ، ص= {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} ؛

تلاحظ أن : ١ ∈ س ، ١ ∈ ص

٢ ∈ س ، ٢ ∈ ص

٣ ∈ س ، ٣ ∈ ص

إذاً كل عنصر في س ينتمي أيضاً إلى ص . تسمى المجموعة س مجموعة جزئية من ص ، ونرمز لذلك بالرمز : س ⊂ ص ،



شكل (١ – ١٠)

وتقرأ « س مجموعة جزئية من ص »

أو « س محتواه في ص»

كما هو موضح في الشكل (١– ١٠)

ومن أمثلة ذلك مايلي :

(١) مجموعة الطلبة في فصلك تعتبر مجموعة جزئية من مجموعة طلبة مدرستك ، لأن كل طالب في فصلك أيضاً طالب في المدرسة .

(٢) مجموعة سكان محافظة حضرموت مجموعة جزئية من مجموعة سكان الجمهورية اليمنية . لماذا ؟

> **لأي مجموعتين س، ص إذا كان كل عنصر في س ينتمي إلى ص فإن "س مجموعة جزئية من ص" أو "س محتواه في ص"**
>
> **ونكتب ذلك رمزياً : س ⊂ ص**

وإذا تأملنا المجموعتين س ، ص مرة أخرى ،

تلاحظ أن العنصر ٤ ∈ ص ، فهل ٤ ∈ س ؟

نقول إنَّ : صـ ليست مجموعة جزئية من سـ، ونكتب " صـ $\not\subset$ سـ"

وتقرأ صـ ليست مجموعة جزئية من سـ" أو " صـ ليست محتواه في سـ"

إذا وجد على الأقل عنصر واحد ينتمي إلى مجموعة (مثل صـ) ولا ينتمي إلى مجموعة أخرى (مثل سـ) نقول إنَّ « صـ ليست مجموعة جزئية من سـ »

مثال إذا كانت ك = {م ، د ، ر ، س ، ة } ،

صـ = {م ، د ، ر، س} ، ع = {م ، ا ، ر ، س}

ضع في ☐ أحد الرمزين $\subset$ ، $\not\subset$ لتصبح العبارة صحيحة مع ذكر السبب :

(١) صـ ☐ ك (٢) صـ ☐ ع (٣) ع ☐ ك

الحل :

(١) صـ $\boxed{\subset}$ ك ، لأن كل عنصر في صـ ينتمي إلى ك

(٢) صـ $\boxed{\not\subset}$ ع ، لأن د $\in$ صـ بينما د $\notin$ ع

(٣) ع $\boxed{\not\subset}$ ك ، لأن ا $\in$ ع بينما ا $\notin$ ك

تمارين ومسائل

[١] ضع علامة (✓) أو (✗) في ☐ لتحصل على عبارة صحيحة فيما يلي :

أ) {٣ ، ٥ ، ٧} $\subset$ {٧ ، ٣ ، ٥ ، ٦} ☐

ب) {١٨} $\subset$ {١٩ ، ٢٠} ☐

جـ) {ا ، ب ، جـ} $\not\subset$ {ا ، ب ، جـ ، ء} ☐

ء) {٧١} $\subset$ {١ ، ٧} ☐

[٢] إذا كانت س = {أ ، ب} ، ص = {جـ ، ء} ،
ع = {أ، ب ، جـ ، ء ، هـ}

أ) هل ص ⊂ س ؟ ولماذا ؟ ب) هل س ⊂ ع ؟ ولماذا ؟

[٣] ضع أحد الرمزين ⊂ ، ⊄ في ☐ لتصبح العبارة صحيحة :

أ) {٥} ☐ {٥،٩}

ب) {٤،٦} ☐ {٦٤}

جـ) {٠،٣} ☐ {٣٠،٣٥}

ء) {٧،٥،٤} ☐ {٤،٧،٥،٧٥}

[٤] إذا كانت س = {٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ ، ١٣ ، ١٥}، عيّن أي المجموعات الآتية مجموعة جزئية من س ، وأيها ليست مجموعة جزئية من س مع ذكر السبب :

أ) {٥ ، ١١ ، ١٥} ء) {٩٧٥}

ب) {٩ ، ١٢} هـ) {١ ، ٣ ، ٥}

جـ) {١١} و) مجموعة أرقام العدد ٥٩٩

[٥] ما العدد الذي يحل محل العنصر ص لتكون كل من العبارات الآتية صحيحة؟

أ) {٢ ، ٥} ⊂ {٢ ، ٤ ، ص}

ب) {١ ، ص} ⊂ {٩ ، ١}

جـ) {٢،٣، ص} ⊂ {٧ ، ٢ ، ٣ ، ٥}

ء) {ص} ⊂ {٢ ، ٦ ، ٨}

[٦] لتكن : **ل** = {أ ، ب ، جـ}؛

اكتب ثلاث مجموعات جزئية من **ل** كل منها مكون من عنصرين .

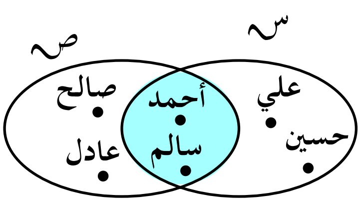
١ : ٦ تقاطع مجموعتين

سبق أن درست عمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة على الأعداد الطبيعية . وهناك توجد عمليات على المجموعات، سندرس منها عمليتين، هما : التقاطع والاتحاد، ونبدأ في هذا الدرس بعملية التقاطع .

لتكن س= {علي، حسين ، أحمد، سالم} ، وهي مجموعة الطلبة الذين حصلوا على الدرجة النهائية في مادة الرياضيات في اختبار الفصل الأول.

ولتكن ص = {أحمد، صالح، سالم، عادل} ، وهي مجموعة الطلبة الذين حصلوا على الدرجة النهائية في مادة القرآن في الفصل الأول أيضاً .

تلاحظ أن أحمد ، سالم حصلا على الدرجة النهائية في مادتي الرياضيات والقرآن معاً.



شكل (١- ١١)

وإذا تأملت الشكل (١ – ١١) المرسوم جانباً تلاحظ أن هناك مجموعة مشتركة بين المجموعتين س، ص ، نسميها « مجموعة التقاطع » .

نقول إنَّ المجموعة {أحمد، سالم } مجموعة تقاطع المجموعتين س، ص

ونكتب رمزياً (س ∩ ص) وتقرأ "س تقاطع ص"

إذن س ∩ ص = {أحمد ، سالم}

تقاطع مجموعتين س و ص هي مجموعة كل العناصر التي تنتمي إلى س وتنتمي إلى ص في آن واحد. ونرمز لها بالرمز "س ∩ ص" وتقرأ "س تقاطع ص"

مثــال

(١) إذا كانت ا = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤}،   ب = {٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

فأوجد ا ∩ ب ، ومثّل ذلك بشكل ڤن .

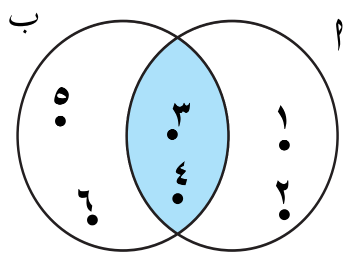
(٢) إذا كانت س = {٤ ، ٥ ، ٦} ، ص = {٢ ، ٣} ؛ فأوجد

س ∩ ص، ومثّل ذلك بشكل ڤن.

الحل :

(١) ا ∩ ب = {٣ ، ٤}

ويمثل الجزء المظلل في الشكل (١–١٢)



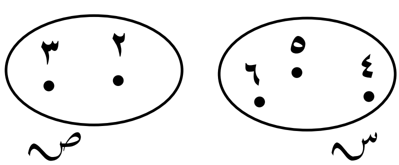
شكل (١ – ١٢)

(٢) تلاحظ أن المجموعتين س، ص

لا توجد بينهما عناصر مشتركة

أي أن : س ∩ ص = ∅

والشكل (١–١٣) يمثل س ∩ ص



شكل (١ – ١٣)

[**١**] أوجد ا ∩ ب في كل مما يلي، ثم مثّل ذلك بشكل ڤن:

أولاً: ا = {٤ ، ٥ ، ٦} ، ب = {٣ ، ٥ ، ٧}

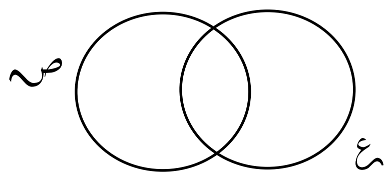
ثانياً: ا = {م ، هـ ، جـ} ، ب = {هـ ، م ، ن}

ثالثاً : ا = {م ، ن ، س} ، ب مجموعة حروف كلمة "سمية"

رابعاً: ا = {٢ ، ٤ ، ٦} ، ب مجموعة الأعداد الطبيعية الأصغر من ٧

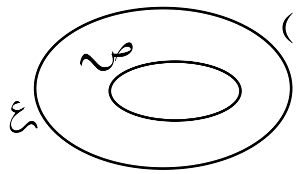
[٢] في كل من الشكلين (١– ١٤) ، (١ – ١٥) التـاليين ظلل المنطقـة التي تمثّل ع ∩ ص:

(أ)



شكل (١ – ١٤)

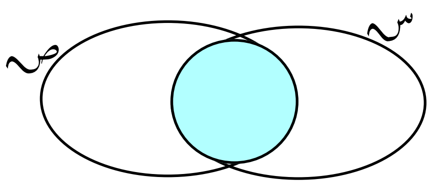
(ب)



شكل (١ – ١٥)

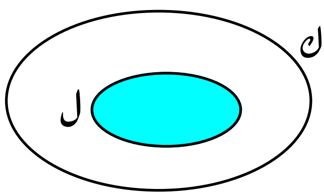
[٣] اكتب ما يمثله الجزء المظلل في كل من الشكلين ((١– ١٦) ، (١ – ١٧) التا ليين:

أولاً :



شكل (١ – ١٦)

ثانياً :



شكل (١ – ١٧)

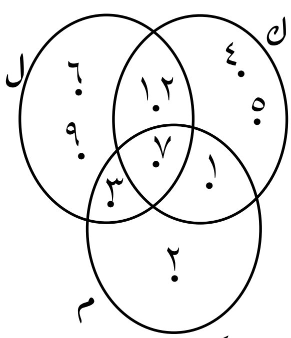
[٤] لتكن س هي مجموعة أرقام العدد ٧٨٩٧٨٤ ص هي مجموعة الأعـداد الطبـيـعـيـة المحـصـورة بين ٣ ، ١٠ اكـتـب س ، ص بطريقـة السرد، ثم أوجد س ∩ ص

[٥] باستخدام الشكل (١–١٨) المرسوم أدناه اكتب بطريقة السرد كلاً مما يلي:

أ) ك ∩ ل　　ب) ل ∩ م

جـ) ك ∩ م　　ء) (ك ∩ ل) ∩ م

هـ) ك ∩ (ل ∩ م)

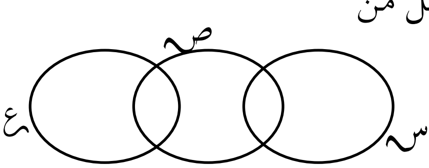


شكل (١ – ١٨)

[٦] إذا كانت س = {أ، ب ، جـ ، ء }

ص = {م ، ن ، جـ} . ع = {و، هـ ، م}

اكتب على الشكل (١– ١٩) عناصر كل من المجموعات س، ص، ع السابقة :



شكل (١ – ١٩)

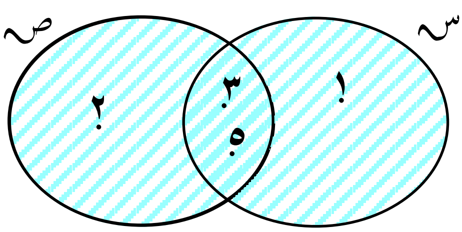
١ : ٧ اتحاد مجموعتين

درست في الدرس السابق عملية التقاطع على مجموعتين .

فإذا كانت س = {١، ٣، ٥} ، ص= {٢، ٣، ٥} ، فإن

س ∩ ص = {٣، ٥}، وهي مجموعة العناصر المشتركة بين المجموعتين س، ص

أما إذا ضُمَّت عناصر المجموعة ص إلى عناصر المجموعة س دون تكرار نتجت مجموعة جديدة هي {١،٢،٣،٥} تسمى مجموعة **الاتحاد .**



شكل (١ – ٢٠)

تأمل الشكل (١ – ٢٠) ماذا تلاحظ .

أَنَّ الشكل يوضح اتحاد المجموعتين س، ص

المجموعة {١، ٢ ، ٣ ، ٥} هي اتحاد

المجموعتين س، ص، وتكتب رمزياً "

س ∪ ص" وتقرأ "س اتحاد ص"

أي أن : س ∪ ص= {١، ٢ ، ٣ ، ٥}

وبشكل عام :

اتحاد مجموعتين س ، ص هي مجموعة كل العناصر التي تنتمي إلى س أو تنتمي إلى ص أو إلى كليهما . ويرمز لها بالرمز "س ∪ ص" وتقرأ "س اتحاد ص"

مثـال

أوجد ل ∪ م لكل مما يأتي ثم مثّل ذلك بشكل ڤن :

أ) ل = {٧ ، ٨ ، ٩} ، م = {٧، ١١ ، ٨}

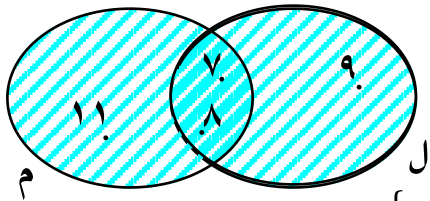
ب) ل = {أ ، ب ، جـ} ، م = {ي ، هـ ، ن}

الحل :

أ) ل ∪ م = { ٧ ، ٨ ، ٩ } ∪ { ٧ ، ١١ ، ٨ } = { ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١١ }

في الشكل (١–٢١) المرسوم جانباً

المنطقة المظللة تمثل ل ∪ م

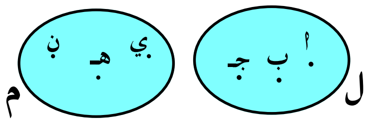


شكل (١ – ٢١)

ب) ل ∪ م = { أ ، ب ، جـ } ∪ { ي ، هـ ، ن }

= { أ ، ب ، جـ ، ي ، هـ ، ن }

في الشكل (١–٢٢) المنطقة المظللة تمثل ل ∪ م



شكل (١ – ٢٢)

تمارين ومسائل

[١] أوجد س ∪ ص ثم مثّلها بشكل فن في كل مما يلي :

أ) س = { ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ } ، ص = { ٢ ، ٥ ، ٦ ، ٩ }

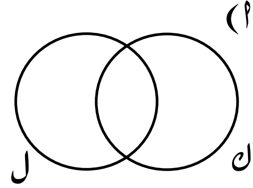
ب) س = { أ ، ب ، جـ } ، ص = { جـ ، ء ، هـ }

جـ) س مجموعة حروف كلمة "حمزة" ، ص = { م ، ح ، ء }

ء) س مجموعة أرقام العدد ٨٧٧ ، ص = مجموعة أرقام العدد ٢٩٠٠

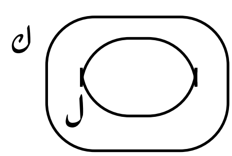
[٢] ظلل المنطقة التي تمثل ك ∪ ل في كل شكل من الأشكال (١– ٢٣) ، (١– ٢٤) ، (١ – ٢٥) التالية :

أ)



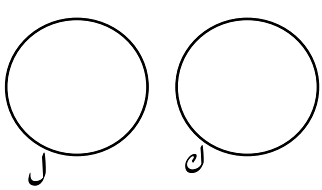
شكل (١ – ٢٣)

ب)



شكل (١ – ٢٤)

جـ)

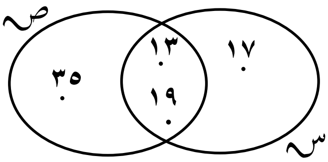


شكل (١ – ٢٥)

[٣] من الشكل (١ – ٢٦) اكتب بطريقة السرد كلاً من المجموعات :

أ) س ، ص   ب) س ∩ ص

جـ) س ∪ ص



شكل (١ – ٢٦)

[٤] أكمل الجدول التالي :

س	ص	س ∩ ص	س ∪ ص
{١ ، ٢ ، ٣}	{٢ ، ٣ ، ٥}		
مجموعة حروف كلمة "جميل"	{جـ ، م ، أ ، ل}		
مجموعة عوامل العدد ٨	{١ ، ٢ ، ٤}		
{أ ، ب ، جـ}	مجموعة حروف كلمة "عدن"		

[٥] لتكن س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٦} ، ص = مجموعة أرقام العدد ٣٦٦

أ) اكتب كلاً من س ∩ ص ، س ∪ ص بطريقة السرد .

ب) مثّل س ، ص بأشكال ڤن.

جـ) ظلل في الشكل الذي رسمته : س ∩ ص باللون الأحمر

و س ∪ ص باللون الأزرق .

[٦] من الشكل (١ –٢٧) المرسوم أدناه : اكتب بطريقة السرد كلاً مما يأتي :

أ) المجموعات س، ص ، ع

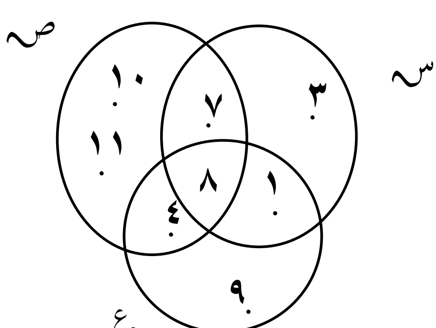
ب) ص ∩ ع

ج) س ∪ ص

ء) س ∪ ع

هـ) (س ∩ ص) ∩ ع

و) (س ∩ ص) ∪ ع



شكل (١ – ٢٧)

١ : ٨ الزوج المرتب

تعلم أن اسم الشخص "عبد الله محمد" يختلف عن اسم الشخص "محمد عبدالله" فهذان الاسمان لشخصين مختلفين، لأننا اعتدنا أن نكتب «اسم الشخص أولاً ثم اسم أبيه ثانياً» فالترتيب مهم جداً. ولهذا فإن الزوج (محمد، عبدالله) ليس هو الزوج (عبدالله ، محمد) حيث يدل الزوج الأول على أن محمد ابن عبدالله ؛ بينما يدل الزوج الثاني على أن عبدالله ابن محمد .

ونظراً لأهمية ترتيب عنصري الزوج داخل القوسين (. . . . ، . . . . .) نسمى هذا الزوج «**الزوج المرتب**» .

يتضح مما سبق أن :

يسمى (أ ،ب) زوجاً مرتباً، فالعنصر الأول (أ) يسمى المسقط الأول، والعنصر الثاني (ب) يسمى المسقط الثاني.
يتساوى الزوجان المرتبان، (أ ،ب)، (جـ ، ء) إذا كان : أ = جـ ، ب = ء

مثال (١)

لتكن س = {صنعاء، الرياض ، دمشق}، ص = {اليمن ، السعودية، سوريا} . كوّن أزواج مرتبة بحيث يكون المسقط الأول قطراً عربياً والمسقط الثاني عاصمة ذلك القطر.

الحل:

الأزواج المرتبة هي :

(اليمن ، صنعاء) ، (السعودية ، الرياض) ، (سوريا ، دمشق) .

مثال (٢)

إذا كان (أ ، ٧) = (٦ ، ء)، فأوجد كلاً من أ ، ء

الحل :

∵ (أ ، ٧) = (٦ ، ء) ∴ أ = ٦ ، ء = ٧

ملاحظة : في المجموعات {٥ ، ٨} = {٨ ، ٥} لعدم أهمية ترتيب عناصر المجموعة .

بينما الأزواج المرتبة (٥، ٨) ≠ (٨، ٥) لأهمية الترتيب داخل الزوج المرتب .

تمارين ومسائل

[١] لتكن س = {عدن، تعز ، الحديدة ، صنعاء} ص = {ع ، ت ، أ ، ص}

اكتب الأزواج المرتبة بحيث يكون المسقط الأول اسم مدينة من المجموعة س، والمسقط الثاني هو أول حرف من حروف تلك المدينة من المجموعة ص .

[٢] إذا كان : أ) (س ، ٥) = (٨، ٥) فما قيمة س؟

ب) (٣، ٢) = (٣ ، ص) فما قيمة ص ؟

جـ) (٧ ، ٧) = (أ ، ب) فما قيمة أ ، ب؟

ء) (٥ ، م) = (ن ، ٢) فما قيمة م ، ن؟

[٣] ضع علامة (✓) أو (✗) في ☐ لتحصل على عبارة صحيحة مع تصويب الخطأ أينما وجد فيما يلي :

أ) (٣، ٤) = (٤ ، ٣) ☐

ب) (٧ ، ٨) = {٧ ، ٨} ☐

جـ) إذا كان (س، ٣) = (٥ ، ص) فإن س = ٥ ، ص = ٣ ☐

ء) إذا كان (أ + ٣ ، ب – ٢) = (٤ ، ٥) فإن أ = ١ ، ب = ٧ ☐

١ : ٩ حاصل ضرب مجموعتين

سبق أن درست عمليتي التقاطع والاتحاد على المجموعات وهنا سندرس عملية جديدة وهي حاصل ضرب مجموعتين .

لتكن لدينا المجموعتين سـ = {أ ، ب} ، صـ = {١ ، ٢} ؛ إذا كتبنا جميع الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول من سـ، ومسقطها الثاني من صـ ، فإننا نحصل على الأزواج المرتبة التالية :

(أ ، ١) ، (أ ، ٢) ، (ب ، ١) ، (ب ، ٢)

نكتب هذه الأزواج المرتبة على صورة مجموعة :

{(أ ، ١) ، (أ ، ٢) ، (ب ، ١) ، (ب ، ٢)}

نسمي هذه المجموعة من الأزواج المرتبة :

حاصل ضرب المجموعة سـ في المجموعة صـ ، ويرمز لها بالرمز سـ × صـ

أي أن : سـ × صـ = {(أ ، ١) ، (أ ، ٢) ، (ب ، ١) ، (ب ، ٢)}

أما مجموعة الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول من صـ ومسقطها الثاني من سـ فهي صـ × سـ = {(١ ، أ) ، (١ ، ب) ، (٢ ، أ) ، (٢ ، ب)}

تلاحظ أن سـ × صـ ≠ صـ × سـ، لأن الزوج (أ ، ١) مثلاً ينتمي إلى سـ × صـ ولا ينتمي إلى صـ × سـ

لكل مجموعتين غير خاليتين سـ ، صـ ؛ فإن حاصل ضرب المجموعة سـ في المجموعة صـ هو مجموعة كل الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول من سـ ومسقطها الثاني من صـ ويرمز لها الرمز سـ × صـ

مثال (١)

إذا كانت س = {٢، ٣} ، ص = {جـ ، ء ، هـ} ، فأوجد ما يلي :

(١) س × ص　　　(٢) ص × س　　　(٣) س × س

الحل:

(١) س × ص = {٢ ، ٣} × {جـ ، ء ، هـ}

= { (٢ ، جـ) ، (٢ ، ء) ، (٢ ، هـ) ، (٣ ، جـ) ، (٣ ، ء) ، (٣ ، هـ) }

(٢) ص × س = {جـ ، ء ، هـ} × {٢ ، ٣}

= {(جـ ، ٢) ، (جـ ، ٣) ، (ء ، ٢) ، (ء ، ٣) ، (هـ ، ٢) ، (هـ ، ٣)}

(٣) س × س = {٢ ، ٣} × {٢ ، ٣}

= {(٢ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٣)}

مثال (٢)

إذا كانت ل = {١ ، ٣ ، ٥}، م = {أ ، ب}؛ اكتب عدد عناصر كل من المجموعات التالية:

١) ل ، م　　　٢) ل × م　　　٣) ل × ل

الحل:

١) عدد عناصر ل = ٣ عناصر ، عدد عناصر م = ٢ (عنصران).

٢) عدد عناصر ل × م = ٣ × ٢ = ٦ عناصر .

٣) عدد عناصر ل × ل = ٣ × ٣ = ٩ عناصر .

تمارين ومسائل

[١] أذا كانت ل = {٥، ٦ ، ٧} ، م = {ب ، جـ} أكمل ما يأتي :

أ) ل × م = { (٥، ب) ، (٥ ، جـ) ، (٦ ، ...) ، (٦ ، ...) ، (٧ ، ...) ، (٧ ، ...) }

ب) م × ل = { (ب ، ...) ، (ب،...) ، (ب ، ...) ، (... ، ٥) ، (... ، ٦) ، (... ، ٧) }

جـ) م × م = { (ب ، ب) ، (ب ، ...) ، (جـ ، ...) ، (... ، ...) }

ى) ل × ل = { (٥ ، ٥) ، (٥ ، ...) ،(٥، ...) ،(٦، ...) ،(...، ...) ،(...، ...) ،(... ، ...) ،(... ، ...) ،(... ، ...) }

[٢] إذا كانت س = {أ ، ب ، جـ} ، ص = {٧ ، ٨} ؛ فأوجد ما يأتي :

أ) س × ص   ب) ص × س   جـ) س × س   ى) ص × ص

[٣] إذا كانت س = {أ ، ب ، جـ} ، ص = {٢ ، ٣ ، ٤} ، أوجد كلاً من :

أ) عدد عناصر س × ص   ب) عدد عناصر ص × س

جـ) عدد عناصر ص × ص   ى) عدد عناصر س × س

[٤] ضع علامة (✓) أو (✗) في ☐ لتحصل على عبارة صحيحة فيما يلي :

أ) (٢ ، ٣) = (٢ ، ٣) ☐

ب) (٤ ، ٥) = (٥ ، ٤) ☐

جـ) س × ص = ص × س (حيث س ≠ ص) ☐

ى) عدد عناصر (س × ص) = عدد عناصر (ص × س) ☐

[٥] لتكن **ك** = {٢ ، ٤ ، ٦} ، **ل** = {١ ، ٣ ، ٥} ؛

ضع أحد الرمزين ∋ أو ∌ في كل مما يلي لتصبح العبارة صحيحة :

أ) (٢ ، ٣) ☐ ك × ل   ب) (٥ ،٦) ☐ ك × ل

جـ) (٦، ١) ☐ ل × ك   د) (٤ ،٦) ☐ ك × ك

[٦] إِذا كانت س × ص = {(أ ، ٣) ، (أ ، ٥) ، (أ ، ٧) ، (ب، ٣)،
(ب، ٥) ، (ب،٧) }

فأوجد كلاً من: ١) س، ص   ٢) ص × س

١ : ١٠ العلاقات

صالح رب أسرة يمنية مكونة من زوجته أروى ، وابنه محمد ، وابنتيه بلقيس ومريم .

ما هي الروابط بين أفراد هذه الأسرة؟

من هذه الروابط : " والد" ، "أخ" ، " أخت" ، "ابن"،...الى آخره .

جميع هذه الروابط **علاقات** أسرية تربط بين أفراد الأسرة الواحدة .

فمثلاً تلاحظ أن :

صالح " والد" محمد .   بلقيس " أخت" مريم .

صالح " والد" بلقيس .   بلقيس "أخت" محمد .

صالح " والد" مريم .   مريم " أخت" بلقيس .

مريم "أخت" محمد .

ونستطيع التعبير عن تلك العلاقات الأسرية بأزواج مرتبة فمثلاً :

علاقة "والد" نكتبها كالتالي :

(صالح ، محمد)، (صالح ، بلقيس) ، (صالح ، مريم) .

وهذا يعني أن المسقط الأول هو الأب والمسقط الثاني هو الابن .

أما علاقة "أخت" فتكتب كأزواج مرتبة على النحو التالي :

(بلقيس ، مريم)، (بلقيس ، محمد) ، (مريم ، بلقيس) ، (مريم ، محمد) .

تدريب

أكمل العلاقات الأسرية التالية بالنسبة لأسرة صالح :

أ) علاقة " والدة" : (أروى ، محمد) ، (أروى ، . . .) ، . . . .

ب) علاقة " أخو" : (محمد ، مريم) ، . . .

جـ) علاقة "زوجة " : . . .

العلاقة من مجموعة إلى أخرى :

إذا كانت سـ = {٢،٣،٥} ، صـ = {٢،٤،٦} ؛ فإن سـ $\times$ صـ =

{(٢ ،٢)،(٢ ،٤)،(٢ ،٦)،(٣ ،٢)،(٣ ،٤)،(٣ ،٦)،(٥ ،٢)،(٥ ،٤)،(٥ ،٦)}

ليكن لدينا المجموعة (ع$_{١}$) مجموعة جزئية من المجموعة سـ$\times$ صـ بحيث أن المجموعة ع$_{١}$ مكونة من الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول أصغر من مسقطها الثاني فنحصل على :

ع$_{١}$ = {(٢ ،٤) ، (٢ ،٦) ، (٣ ،٤) ، (٣ ،٦) ، (٥ ،٦)}

وبنفس الطريقة يمكن أن نأخذ (ع$_{٢}$) علاقة "أكبر من" من المجموعة سـ$\times$ صـ، أي أن عناصرها أزواج مرتبة مسقطها الأول أكبر من مسقطها الثاني ؛ فنحصل على :

ع$_{٢}$ = {(٣ ، ٢) ، (٥ ، ٢) ، (٥ ، ٤)}

تلاحظ أن المجموعة الجزئية الأولى (ع$_{١}$) من سـ$\times$ صـ أخذت برابطة " أصغر من" ، بينما المجموعة الجزئية الثانية (ع$_{٢}$) من سـ $\times$ صـ أخذت برابطة " أكبر من" . تسمى كل من ع$_{١}$ ، ع$_{٢}$ **بعلاقة** من سـ إلى صـ

وبشكل عـام :

العلاقة ع من المجموعة س إلى المجموعة ص هي مجموعة جزئية من حاصل ضرب المجموعتين س × ص ؛ أي أن : ع ⊃ س × ص

تمثيل العلاقة بمخطط سهمي :

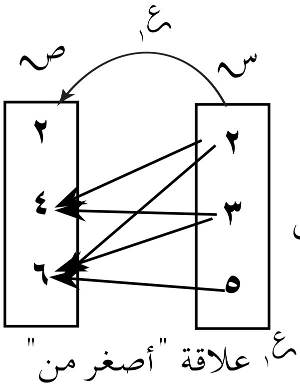
تعلم مما سبق أن ع$_1$ هي علاقة "أصغر من" ، وكتابتها كأزواج مرتبة على النحو التالي :

ع$_1$ = {(٢ ، ٤)، (٢ ، ٦)، (٣ ، ٤)، (٣ ، ٦)، (٥ ، ٦)}

ويتم توضيح هذه العلاقة بمخطط سهمي كالتالي :

نرسم المجموعتين س، ص ثم نرسم سهماً يربط مسقطي كل زوج في المجموعة (ع$_1$) يبدأ من المسقط الأول في س وينتهي في المسقط الثاني في ص. انظر الشكل (١ – ٢٨)

نسمي هذا المخطط **مخططاً سهمياً** .



علاقة "أصغر من"

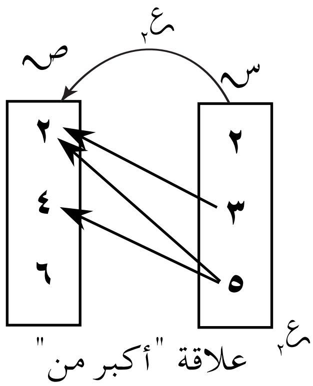
شكل (١ – ٢٨)

ويمكن بالطريقة نفسها رسم مخطط سهمي للعلاقة :

ع$_2$ وهي علاقة "أكبر من" ، حيث :

ع$_2$ = {(٣ ، ٢)، (٥ ، ٢)، (٥ ، ٤)}

الشكل (١ – ٢٩) يوضح العلاقة ع$_2$



علاقة "أكبر من"

شكل (١ – ٢٩)

مثال (١)

إذا كانت س = {٢ ، ٤ ، ٦} ، ص = {١ ، ٢ ، ٣}

اكتب العلاقات التالية ثم مثّل كلاً منها بمخطط سهمي :

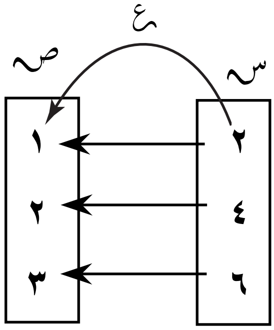
أ) علاقة "ضعف" من س إلى ص

ب) علاقة "أكبر من" من س إلى ص

الحل :

أ) علاقة "ضعف" = {(٢ ، ١)، (٤ ، ٢)، (٦ ، ٣)}؛

أي أن المسقط الأول من سـ ضعف المسقط الثاني من صـ ، ويمثلها المخطط السهمي المرسوم جانباً في الشكل (١ – ٣٠) .



علاقة "ضعف"

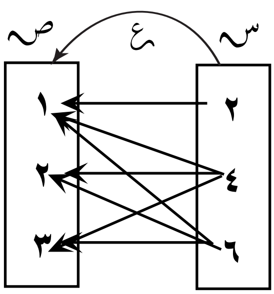
شكل (١ – ٣٠)

ب) علاقة " أصغر من " من سـ إلى صـ هي :

{(٢ ،١)، (٤ ،١)، (٤ ،٢)، (٤ ،٣)، (٦ ،١)، (٦ ،٢)، (٦ ،٣)}؛

يمثلها المخطط السهمي المرسوم جانباً .

في الشكل (١ – ٣١) .



علاقة "أكبر من"

شكل (١ – ٣١)

العلاقة من مجموعة إلى نفسها :

إذا كانت سـ= {٤، ٧} ، فإن

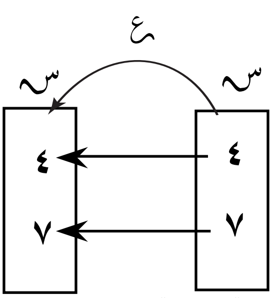
سـ × سـ= {٤، ٧} × {٤، ٧} = {(٤ ،٤)، (٤ ،٧) ، (٧ ،٤)، (٧ ،٧)}

إذا أخذنا المجموعة الجزئية ع من سـ×سـ المكونة من الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول "يساوي" مسقطها الثاني نجد أن :

ع = {(٤ ،٤) ، (٧ ،٧)}

تكونت هذه العلاقة من المجموعة سـ إلى نفسها،

والشكل (١ – ٣٢) يمثّل مخططها السهمي .



علاقة "يساوي"

شكل (١ – ٣٢)

العلاقة ع من المجموعة س إلى نفسها هي مجموعة جزئية من
س × س أي أن : ع ⊂ س × س
وتسمى مثل هذه العلاقة : ع علاقة على س

مثال (٢)

لتكن س = {١ ، ٢ ، ٣} ؛ اكتب ما يلي :

أ) س × س

ب) ع١ هي علاقة "أكبر من" على س ، ومثّلها بمخطط سهمي .

جـ) ع٢ هي علاقة "يساوي" على س ، ومثّلها بمخطط سهمي .

الحل :

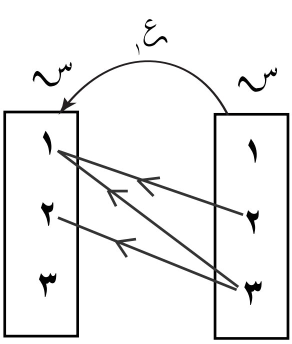
أ) س × س = {(١، ١) ، (١، ٢) ، (١، ٣) ، (٢، ١) ، (٢، ٢) ،
(٢، ٣) ، (٣ ، ١) ، (٣، ٢) ، (٣، ٣)}

ب) ع١ ، وهي علاقة "أكبر من" هي عبارة عن المجموعة الجزئية من
س × س والتي مسقطها الأول أكبر من مسقطها الثاني ؛

أي أن :

ع١ = {(٢ ، ١) ، (٣ ، ١) ، (٣ ، ٢)}

ويمثّلها المخطط السهمي في الشكل (١ – ٣٣)



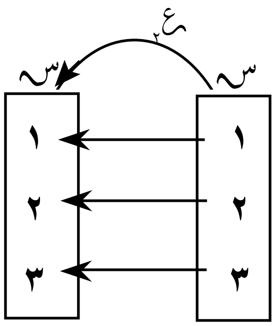
علاقة "أكبر من"

شكل (١ – ٣٣)

جـ) $ع_٢$، وهي علاقة "يساوي" هي المجموعة الجزئية من س × س والتي مسقطها الأول يساوي مسقطها الثاني ؛ أي أن :

$ع_٢$ = {(١ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣)}

ويمثلها المخطط السهمي في الشكل (١ – ٣٤)



علاقة "يساوي" شكل (١ – ٣٤)

تمارين ومسائل

[١] إذا كانت س = {٣، ٤} ، ص = {٦، ٨} ، فاكتب أولاً س × ص، ثم اكتب العلاقات التالية من س إلى ص :

أ) $ع_١$ علاقة "أصغر من" ، ومثّلها بمخطط سهمي.

ب) $ع_٢$ علاقة "نصف" ، ومثّلها بمخطط سهمي .

جـ) $ع_٣$ علاقة "عامل من عوامل" ، ومثّلها بمخطط سهمي .

[٢] لتكن ل = {٢، ٤، ٦، ٨} ، أوجد ما يلي :

أ) ل × ل

ب) $ع_٢$ علاقة "يساوي"

جـ) $ع_٣$ علاقة "ثلاثة أمثال" .

ء) $ع_٤$ علاقة "ضعف"

هـ) مثّل كلاً من العلاقات $ع_٢$، $ع_٣$ ، $ع_٤$ بمخطط سهمي

[٣] إذا كانت س = {١، ٢، ٤، ٥، ٧}، ع علاقة على س، حيث ع علاقة "يزيد بواحد عن" . اكتب العلاقة ع كأزواج مرتبة ثم مثّلها بمخطط سهمي.

[٤] لتكن ع علاقة "نصف" على المجموعة س، حيث :

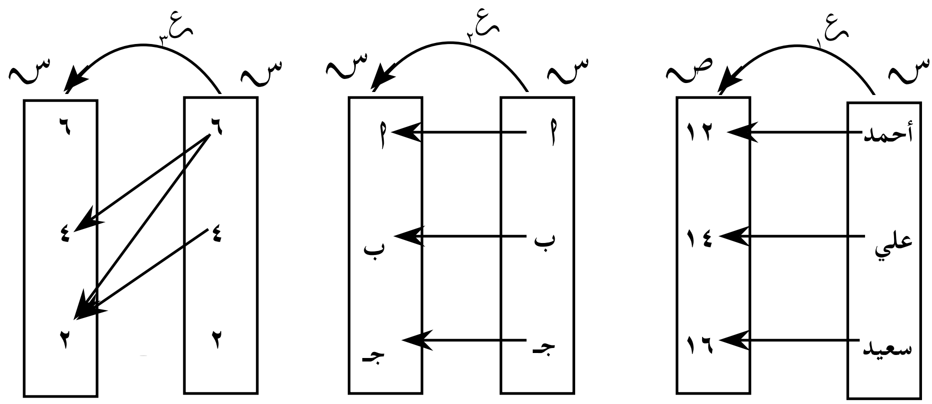
س = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥}، اكتب عناصر المجموعة ع ، ثم ضع علامة (✓) أو (✗) في ☐ لتحصل على عبارة صحيحة :

أ) (٢، ٤) ∈ ع ☐ ء) (٠، ٣) ∉ ع ☐

ب) (٥، ١٠) ∉ ع ☐ هـ) (١، ٢) ∈ ع ☐

جـ) (٤، ٢) ∈ ع ☐ و) (٤، ٨) ∈ ع ☐

[٥] من المخططات السهمية التالية في الشكل (١ – ٣٥) : اكتب العلاقات بصورة أزواج مرتبة :



شكل (١ – ٣٥)

[٦] ارسم مخططاً سهمياً لعلاقة "ثلث" على المجموعة {١ ، ٢ ، ٣ ، ٦}

١ : ١١ تمارين عامة

[١] أيّ المجموعات التاليه منتهية وأيها غير منتهية :

أ) مجموعة مضاعفات العدد ٧ . ب) {١٠٦، ١١٠، ١١٤، ١١٨، ...}

جـ) {٥، ١٠، ١٥، ٢٠، ...، ٨٠} . ء) مجموعة أجزاء القرآن الكريم .

[٢] أيّ المجموعات التالية مجموعة خالية :

أ) مجموعة الطلبة في فصلك الذين يزيد وزنهم عن ٢٠٠ كيلو جرام.

ب) مجموعة الأعداد الطبيعية المحصورة بين ٧ ، ٨

جـ) {٠} ء) مجموعة الأعداد الطبيعية الأصغر من صفر .

[٣] اكتب المجموعات التالية بطريقة السرد :

أ) مجموعة ألوان إشارات المرور

ب) مجموعة القارات في العالم

جـ) مجموعة أرقام العدد ١٧١٧

[٤] اكتب المجموعات التالية بطريقة الصفة المميزة :

أ) س = {الفجر، الظهر، العصر، المغرب، العشاء}

ب) ص = {٤ ، ٦}

جـ) ل = {١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩}

ء) ع = {ك ، ت ، أ ، ب}

[٥] ضع أحد الرموز $\in$ أو $\notin$ أو $\subset$ أو $\not\subset$ أو = في ◯ لتحصل على عبارة صحيحة :

أ) ٧ ◯ {٢،٣،٥،٧}   ب) المكلا ◯ مجموعة مدن الجمهورية اليمنية .

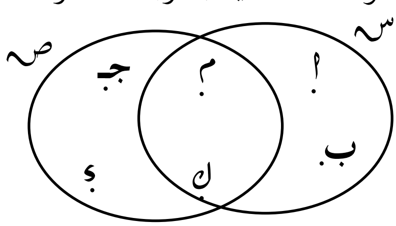
جـ) {١٥} ◯ {٥١٥}   ء) {أ ، ب ، جـ} ◯ {أ ، ب ، جـ ، ء}

[٦] من الشكل (١ – ٣٦) ، اكتب عناصر المجموعات التالية بطريقة السرد :

أ) س ، ص

ب) س $\cap$ ص

جـ) س $\cup$ ص



شكل (١ – ٣٦)

[٧] لتكن س = {٢ ، ٣ ، ٥} ، ص = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٦} ؛

أ) أوجد س $\cap$ ص

ب) هل س $\subset$ ص ؟ اذكر السبب .

جـ) ارسم شكلاً يمثّل المجموعتين س ، ص ثم ظلل س $\cap$ ص

[٨] إذا كانت صـ = {أ ، ب ، جـ}، فكوّن ثلاث مجموعات جزئية للمجموعة صـ

[٩] ضع علامة (✓) أو (✗) في ☐ لتحصل على عبـارة صحيحة في كل مما يلي :

أ) مجموعة أرقام العدد ٨٥٣ هي {٣ ، ٥ ، ٢ ، ٨} ☐

ب) {١٣٥٤} ⊂ مجموعة الأعداد التي أصغر من ١٠ ☐

جـ) {م ، ن} ∪ {م ، ل ، ن} = {م ، ل ، ن} ☐

ء) إذا كانت (س ، ٤) = (٥ ، ٤) فإن س = ٥ ☐

[١٠] إذا كانت سـ = {٣ ، ٦} ، فأوجد ما يأتي :

أ) سـ × سـ

ب) ع١ وهي علاقة "ضعف" على سـ، ومثّلها بمخطط سهمي .

جـ) ع٢ وهي علاقة "يساوي" على سـ، ومثّلها بمخطط سهمي .

[١١] اكتب عدداً يحل محل س لتكون كل من العبارات التالية صحيحة :

أ) س ∋ {٣}

ب) ٥ ∋ {س ، ١٠، ١٥}

جـ) س ∋ {$\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$}

ء) {١ ، س} ⊂ {١،٢،٣}

هـ) {١٣،١٥،١٧} = {١٥، س ، ١٧}

و) (س ، ٢٥) = (١٠، ٢٥)

[١٢] إذا كانت سـ= {أ ، ب ، جـ} ، فأوجد ما يأتي :

أ) سـ × سـ ؛

ب) علاقة "يساوي" على سـ مثّلها بمخطط سهمي .

[١٣] إذا كانت ل = {٧ ، ٨} ، م = {٩ ، ١٠} ؛ فأوجد :

أ) ل × م ؛

ب) علاقة "أصغرمن" من ل إلى م ومثّلها بمخطط سهمي .

١ : ١٢ اختبار الوحدة

[١] ضع علامة (✓) أو (✗) في ☐ لتحصل على عبارة صحيحة فيما يلي :

أ) مجموعة الحروف الهجائية مجموعة منتهية ☐

ب) مجموعة الأعداد الطبيعية الأصغر من ٢٠٠٠ مجموعة غير منتهية ☐

جـ) مجموعة سكان الكرة الأرضية مجموعة غير منتهية ☐

[٢] لتكن ع = {أ، ب ، جـ ، ء} ؛ ضع ∈ أو ∉ أو ⊂ أو ⊄ أو = في ◯

لتصبح العبارة صحيحة في كل مما يلي :

أ) { أ ، ب ، جـ } ◯ ع   جـ) ع ◯ {أ ، ب ، جـ}

ب) هـ ◯ ع   ء) أ ◯ ع

[٣] مثِّل بأشكال ڤن المجموعتين : س = {١٠ ، ٢٠ ، ٣٠} ،

ص = {٢٠ ، ٤٠ ، ٦٠} ؛ ثم أوجد :

أ) س ∩ ص   ب) س ∪ ص

[٤] اكتب المجموعات التالية بطريقة السرد :

س = مجموعة الأعداد الفردية الأكبر من ٤ وأصغر من ١٠

ع = مجموعة ألوان علم اليمن .

[٥] اكتب المجموعتين التاليتين بطريقة ذكر الصفة المميزة :

ص = {١٢ ، ١٤ ، ١٦ ، ١٨} .

ل = {السبت، الأحد ، الاثنين، الثلاثاء، الأربعاء ، الخميس ، الجمعة }.

[٦] لتكن س = {أ ، ب} ، ص = {٢ ، ٧} ، أوجد :

أ) س × ص   ب) س × س

جـ) ع ، وهي علاقة "يساوي" من س إلى س ، ومثّلها بمخطط سهمي .

الوحدة الثانيــة

مجموعة الأعداد الصحيحة

٢ : ١ مجموعة الأعداد الطبيعية

تؤلف الأعداد: ٠ ، ١، ٢، ٣، ....، ....، ....، ٩٨، ٩٩، ١٠٠، ... مجموعة نسميها مجموعة الأعداد الطبيعية ونرمز لها بالرمز (ط) ؛ فتكون :

ط = {٠، ١، ٢، ٣، ...}

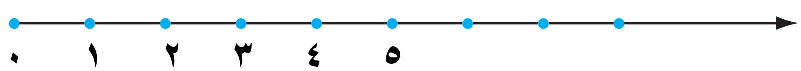
تلاحظ أن الصفر هو أصغر عدد طبيعي .

هل تستطيع تحديد أكبر عدد طبيعي ؟

هل مجموعة الأعداد الطبيعية منتهية أو غير منتهية؟

هل العدد ٣٤٥ ∈ ط؟ هل العدد $\frac{٢}{٥}$ ∈ ط؟

ويمكن تمثيل مجموعة الأعداد الطبيعية على خط الأعداد، كما في الشكل(٢–١) التالي :



شكل (٢–١)

بحيث تمثل النقطة الأولى الصفر، وهي نقطة البداية ، والنقطة الثانية العدد واحد، الثالثة العدد اثنان . . . وهكذا.

لاحظ أن المسافات بين النقاط على خط الأعداد تكون متساوية .

خواص العمليات على مجموعة الأعداد الطبيعية (ط)

١- خاصية الانغلاق

تأمل : ٥ + ٣ = ٨

٧ × ٤ = ٢٨

لاحظ أن ٥ ،٣ عددان طبيعيان ،مجموعهما ٨ ، هو عدد طبيعي أيضاً .
وكذلك : العددان ٧ ،٤ عددان طبيعيان، وحاصل ضربهما ٢٨ ، هو عدد طبيعي أيضاً. وهذا ما نسميه "خاصية الانغلاق" . ولهذا نقول إن عمليتي الجمع والضرب مغلقتان على مجموعة الأعداد الطبيعية ، وعليه فإن :

مجموع أي عددين طبيعيين عدد طبيعي ؛ أي أنه :
لكل ا ، ب ∈ ط ، فإن (ا + ب) ∈ ط
حاصل ضرب أي عددين طبيعيين عدد طبيعي ؛ أي أنه :
لكل ا ، ب ∈ ط ، فإن (ا × ب) ∈ ط

هل مجموعة الأعداد الطبيعية مغلقة تحت عملية الطرح؟ أعط مثالاً .

هل مجموعة الأعداد الطبيعية مغلقة تحت عملية القسمة؟ أعط مثالاً .

٢ - خاصية الإبدال:

تأمل : ١٥ + ٢٣ = ٣٨ ، ٢٣ + ١٥ = ٣٨

٩ × ٧ = ٦٣ ، ٧ × ٩ = ٦٣

تلاحظ أن : ١٥ + ٢٣ = ٢٣ + ١٥

٩ × ٧ = ٧ × ٩

وهذا ما نسميه "خاصية الإبدال" . ولهذا نقول إن كلاً من عمليتي الجمع والضرب إبداليتان، في مجموعة الأعداد الطبيعية ؛ وعليه فإن :

لكل عددين طبيعيين ا ، ب فإن :

ا + ب = ب + ا ، ا × ب = ب × ا

هل عملية الطرح إبدالية في مجموعة الأعداد الطبيعية؟ أعط مثالاً .

هل عملية القسمة إبدالية في مجموعة الأعداد الطبيعية؟ أعطِ مثالاً .

٣ – خاصية التجميع :

تأمل :

(للجمع)

(٥ + ٤) + ٣	٥ + (٤ + ٣)
٩ + ٣	٥ + ٧
١٢	١٢

(للضرب)

(٧ × ٣) × ٥	٧ × (٣ × ٥)
٢١ × ٥	٧ × ١٥
١٠٥	١٠٥

تلاحظ أن :

(٥ + ٤) + ٣ = ٥ + (٤ + ٣)

تلاحظ أن :

(٧ × ٣) × ٥ = ٧ × (٣ × ٥)

وهذا ما نسميه "خاصية التجميع" ؛ ولهذا نقول إن كلاً من عمليتي الجمع والضرب تجميعية في مجموعة الأعداد الطبيعية ؛ وعليه فإن :

> **لأي ثلاثة أعداد طبيعية أ ، ب ، جـ :**
>
> **(أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ)**
>
> **(أ × ب) × جـ = أ × (ب × جـ)**

هل عملية الطرح تجميعية في مجموعة الأعداد الطبيعية؟ أَعطِ مثالاً .

هل عملية القسمة تجميعية في مجموعة الأعداد الطبيعية؟ أَعطِ مثالاً .

٤ – العنصر المحايد :

تأمل : ٧ + ٠ = ٧ ، ٠ + ٧ = ٧ ، ١٢ + ٠ = ١٢ ، ٠ + ١٢ = ١٢

٨ × ١ = ٨ ، ١ × ٨ = ٨ ، ٧٤ × ١ = ٧٤ ، ١ × ٧٤ = ٧٤

تلاحظ أن : عند جمع الصفر مع أي عدد طبيعي أو جمع أي عدد طبيعي مع الصفر يكون المجموع هو العدد الطبيعي نفسه .

وكذلك عند ضرب العدد (١) في أي عدد طبيعي أو ضرب أي عدد طبيعي في العدد (١) يكون حاصل الضرب هو العدد الطبيعي نفسه .

ولهذا نقول إن في مجموعة الأعداد الطبيعية "الصفر عنصر محايد لعملية الجمع " في مجموعة الأعداد الطبيعية ، و"العدد واحد عنصر محايد بالنسبة لعملية الضرب" في مجموعة الأعداد الطبيعية . وعليه فإن :

لأي عدد طبيعي : أ + ٠ = ٠ + أ = أ
أ × ١ = ١ × أ = أ

– هل الصفر عنصر محايد بالنسبة لعملية الطرح في مجموعة الأعداد الطبيعية؟ أعط مثالاً .

– هل العدد واحد عنصر محايد بالنسبة لعملية القسمة في مجموعة الأعداد الطبيعية؟ أعط مثالاً .

٥ – خاصية توزيع الضرب على الجمع :

تأمل :

٨ × (٣ +٤)	(٨ × ٣) + (٨ × ٤)
٨ × ٧	٢٤ + ٣٢
٥٦	٥٦

تلاحظ أن : ٨ × (٣ + ٤) = (٨ × ٣) + (٨ × ٤)

وهذا ما نسميه "خاصية توزيع الضرب على الجمع " في مجموعة الأعداد الطبيعية ؛ ولهذا نقول إن عملية الضرب تتوزع على عملية الجمع في مجموعة الأعداد الطبيعية؛ وعليه فإن :

لأي ثلاثة أعداد طبيعية (ا ، ب ، حـ) ؛ يكون :

ا × (ب + جـ) = (ا × ب) + (ا × جـ)

هل تتوزع عملية الضرب على عملية الطرح في مجموعة الأعداد الطبيعية؟ أعط مثالاً .

هل تتوزع عملية القسمة على عملية الجمع في مجموعة الأعداد الطبيعية؟ أعط مثالاً .

هل تتوزع عملية القسمة على عملية الطرح في مجموعة الأعداد الطبيعية؟ أعط مثالاً .

تمارين ومسائل

[١] أي العبارات الآتية صحيحة ؛ وأيها خاطئة؟ :

أ) ٥ ∋ ط   ب) ٠,٥ ∋ ط   جـ) ١٢ ∌ ط ،

ء) $\frac{١}{٤}$ ∌ ط   هـ) {٦،٥،٤} ⊃ ط   و) {٠} ⊅ ط ،

ز) {$\frac{١}{٢}$ ،١ ، ٢} ⊃ ط   ح) {١،٢،٣،...} ⊃ ط ،

ط) {٢،٤،٦،...} ⊅ ط .

[٢] ضع الرمز ∋ أو ∌ أو ⊃ أو ⊅ في ☐ لتصبح العبارات التالية صحيحة :

ا) ٢٥ ☐ ط   ب) {١،٢،٣} ☐ ط

جـ) ط ☐ {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥}   ء) ١٢,٥ ☐ ط

[٣] مثّل المجموعات التالية على خط الأعداد:

أ) {٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧}   ب) {٥٥ ، ٥٦ ، ٥٧ ، ٥٨}

[٤] حدد العمليات التي تتوفر فيها خاصية الانغلاق في (ط) من كل من العمليات التالية:

أ) ٣٧ + ٦٢   ب) ١٢٥ – ١٣٢   جـ) ٣٧٥ + ٣٠٤

ء) ٧ × ٤   هـ) ٢٦ × ١٢   و) ١٨ ÷ ٥

[٥] تحقق أياً من ا لعمليات التالية إبدالية :

أ) ١٤ × ٣ ب) ١٢ + ٣٦ جـ) ٥٤ – ١٢

ء) ١٧ + ٣٨ هـ) ٢٥ ÷ ٥ و) ٤٢ × ١٠

[٦] استخدم خاصية التجميع لإيجاد ناتج ما يلي :

أ) ٥ +٣ +١٢ ب) ٢٤ + ١٦ + ٤٨ جـ) ٣٦ + ١٩ + ١١

ء) ٥ × ٤ × ١٢ هـ) ٢٦ × ٨ × ٥ و) ٧ × ١٢ × ٢٠

[٧] استخدم خاصية التوزيع لإيجاد ناتج ما يلي :

أ) ٦ × (٨ + ٩) ب) ٤٣ × (٤ + ٨)

جـ) (٦ + ٩) × ٣٢ ء) (٥ + ٧) × ٣٩

[٨] أوجد ناتج ما يلي بأبسط الطرق :

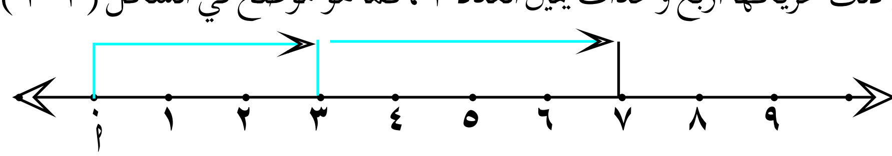
أ) ٤٢ × ٦ + ٤٢ × ٤ ب) ٨ × ٧٣ + ١٢ × ٧٣

جـ) ١٩ × ١٥ + ١٩ × ٨٥ ء) ٣٢ × ٤١٣ + ٣٢ × ٥٨٧

٢ : ٢ مجموعة الأعداد الصحيحة

تعرفت كيف تمثل الأعداد الطبيعية على خط الأعداد .

تخيل أن النقطة أ عند العدد صفر ، تم تحريكها ثلاث وحدات جهة اليمين ، ثم تلى ذلك تحريكها أربع وحدات يمين العدد ٣ ،كما هو موضح في الشكل (٢–٢) التالي :

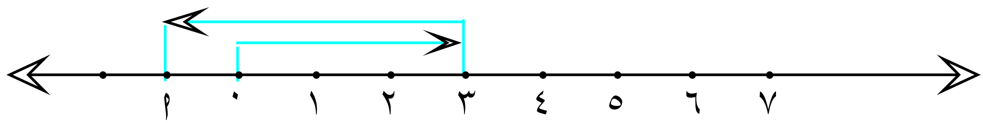


شكل (٢–٢)

تجد أن نهاية حركة النقطة أ عند العدد ٧ .

وعندما يشير السهم إلى جهة اليسار يعني أن الحركة في الاتجاه المعاكس ، فمثلاً دعنا نرسم حركة نقطة ثلاث وحدات يمين الصفر، ثم تلى ذلك تحريكها أربع

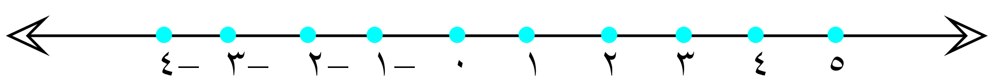
وحدات يسار العدد ٣، كما هو واضح في الشكل (٢–٣) التالي :



شكل (٢–٣)

لاحظ أن نهاية السهم على بعد وحدة واحدة يسار الصفر على خط الأعداد. وحيث أن النقطة على يسار الصفر لايمكن تمثيلها بأي عدد طبيعي؛ إذن النقطة ﺃ تمثل عدد جديد وهي تبعد وحدة واحدة يسار الصفر . وبما أن العدد ١ يبعد وحدة واحدة يمين الصفر، لهذا نقول إن ﺃ تقع عند معكوس العدد ١ . وبالمثل يمكن أن نسمي النقطة على بعد وحدتين يسار الصفر معكوس العدد ٢ . . وهكذا .

ويكتب معكوس العدد ١ بـ (-١) ويقرأ سالب ١ ، ومعكوس العدد ٢ هو (–٢) ويقرأ سالب ٢ . . . وهكذا ؛ فيصبح خط الأعداد الموسع كما في الشكل (٢–٤) التالي :



شكل (٢–٤)

فتكون مجموعة الأعداد الجديدة هي { -١ ، -٢ ، -٣ ، . . . } .

وتسمى هذه المجموعة بمجموعة الأعداد الصحيحة السالبة ويرمز لها بالرمز (ص-)

وتقرأ عناصرها سالب واحد ، سالب اثنان ، سالب ثلاثة ، . . . إلخ .

والأعداد السالبة لها استخدامات كثيرة في حياتنا اليومية ، وذلك للتعبير عن أوضاع متعاكسة فنعبر عن المكسب بالإشارة(+) ونعبر عن الخسارة بالإشارة (–) . ومن أمثلة الأوضاع المتعاكسة الارتفاع والانخفاض والاتجاه إلى اليمين

والاتجاه إلى اليسار، درجة الحرارة فوق الصفر ودرجة الحرارة تحت الصفر . . .إلخ .

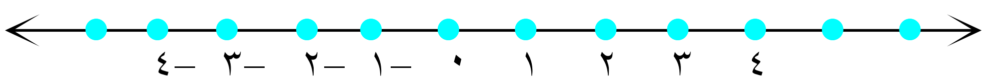
فمثلاً إذا قلنا إن درجة الحرارة الصغرى في محافظة ذمار ثلاث درجات مئوية فوق الصفر فنعبر عنها بالرمز (٣٠م) تقرأ موجب ثلاث درجات مئوية ، أما إذا قلنا إن درجة الحرارة الصغرى في محافظة ذمار ثلاث درجات مئوية تحت الصفر فنعبر عنها بالرمز (-٣م) وتقرأ سالب ثلاث درجات مئوية .

مجموعة الأعداد{+١،+٢،+٣، ...} تسمى مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة ويرمز لها بالرمز (ص+) وتقرأ عناصرها موجب واحد، موجب اثنان ، موجب ثلاثة . . . وهكذا . الخ ، وحيث أن مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة هي نفسها مجموعة أعداد العد فيمكن كتابتها بدون الإشارة الموجبة (+) . أي أن : ص+ = {١،٢،٣،...}

والمجموعة الناتجة من ص+ ∪ { ٠ } ∪ ص- تسمى مجموعة الأعداد الصحيحة ويرمز لها بالرمز ص

∴ ص = {...،٣،٢،١ ، ٠ ، -١، -٢، -٣،...}

وتمثل مجموعة الأعداد الصحيحة على خط الأعداد كما في الشكل التالي :



شكل (٢-٥)

تذكر:

ط = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ...}

ص+ = {١ ، ٢ ، ٣ ، ...}

ص- = {-١ ، -٢ ، -٣ ، ...}

ص = {... ، ٣ ، ٢ ، ١ ، ٠ ، -١ ، -٢ ، -٣، ...}

مثال (١)

عيِّن العبارات الصحيحة والعبارات الخطأ فيما يلي، واذكر السبب :

أ) −٤ $\in$ ص⁻   ب) ٨ $\in$ ص⁻

جـ) ص⁺ $\cap$ ص⁻ = {٠}   ء) ط $\subset$ ص

الحل :

أ) −٤ $\in$ ص⁻ عبارة صحيحة لأن (−٤) عدد صحيح سالب ، ص⁻ مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة .

ب) ٨ $\in$ ص⁻ عبارة خطأ لأن (٨) عدد صحيح موجب، ص⁻ مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة .

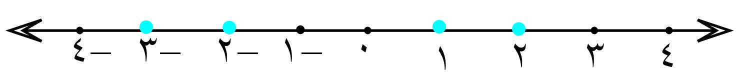
جـ) ص⁺ $\cap$ ص⁻ = {٠} عبارة خطأ ؛ لأنه لا توجد عناصر مشتركة بين ص⁺ و ص⁻

ء) ط $\subset$ ص عبارة صحيحة ، لأن جميع عناصر ط تنتمي إلى ص

مثال (٢)

ارسم خط الأعداد ، وحدد عليه النقاط التي تمثل الأعداد ٢ ، ١، −٢ ، −٣

الحل :



شكل (٢ − ٦)

تمارين ومسائل

[١] عيّن العبارات الصحيحة ، والعبارات الخطأ فيما يلي ؛ واذكر السبب :

أ) −٢ $\in$ ص⁻   ب) ٠ $\in$ ص⁺

جـ) ص⁻ $\cap$ ط = {٠}   ء) ص⁻ $\cup$ ط = ص

[٢] عيِّن العبارات الصحيحة والعبارات الخطأ فيما يلي، واذكر السبب:

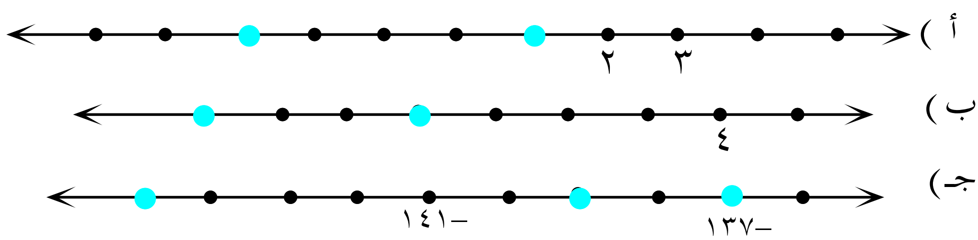
أ) {٠ ، ٢ ، ٤} ⊂ ص$^{+}$ ب) {-١ ، ٠ ، ١} ⊂ ص

جـ) {-١، -٣، -٥} ⊂ ص$^{-}$ هـ) ص$^{+}$ ∪ ص$^{-}$ = ص

[٣] ارسم خط الأعداد وحدد عليه النقاط التي تمثل الأعداد التالية:

-٤ ، -٥ ، ٢ ، ٤

[٤] اكتب العدد الذي تمثله كل نقطة ملونة على خط الأعداد في الشكل (٢ -٧) التالي:



شكل (٢-٧)

[٥] ضع الرمز ∈ أو ∉ أو ⊂ أو ⊄ في ○ لتصبح العبارات التالية صحيحة:

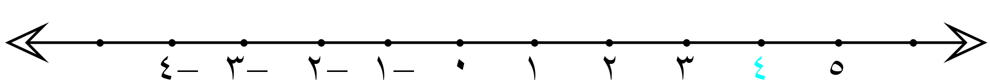
أ) -٣٢ ○ ط ب) {-٨٧} ○ ص$^{-}$ جـ) ط ○ ص$^{-}$

د) ١٣٨ ○ ص$^{+}$ هـ) ص$^{+}$ ○ ص و) -٨٤٢ ○ ص$^{-}$

٢ : ٣ مقارنة الأعداد الصحيحة

تعلم من دراستك السابقة أن العدد ٤ أكبر من العدد ٣، ونعبر عن ذلك رمزياً فنكتب : ٤ > ٣ .

وإذا نظرت إلى خط الأعداد في الشكل (٢ - ٨) أدناه تجد أن : العدد ٤ يقع على يمين العدد ٣ .



شكل (٢-٨)

وكذلك العدد ٥ < ٧ لأن العدد ٥ يقع على يسار العدد ٧، والعدد –٢ > –٣ لأن العدد –٢ يقع على يمين العدد –٣ .

تأمـل : عند ترتيب الأعداد على خط الأعداد ، تلاحظ أن :

... < –٣ < –٢ < –١ < ٠ < ١ < ٢ < ٣ < ...

ومن ذلك تجد أن : – كل عدد صحيح موجب أكبر من الصفر .

– كل عدد صحيح سالب أصغر من الصفر .

وبصورة عامة :

لأي عددين صحيحين أ ،ب :

إذا كان أ > ب فإن العدد أ يقع على خط الأعداد على اليمين من العدد ب .

وإذا كان أ < ب فإن العدد أ يقع على خط الأعداد على اليسار من العدد ب .

تدريب

أي العددين أكبر ٦٧٨ أو ٦٥٨ ؟

أي العددين أكبر –٦٧٨ أو –٦٥٨ ؟

مثال (١)

قارن بين كل زوج من الأعداد التالية باستخدام أحد الرموز : > ، أو < ، أو = :

أ) ١٣٩ ، ١٣٩ ب) –٤ ، ٠

جـ) –١٥ ، ١٥ ء) –٧٢ ، –٩٧

الحل :

أ) ١٣٩ = ١٣٩ ب) –٤ < ٠

جـ) –١٥ < ١٥ ء) –٧٢ > –٩٧

مثال (٢)

عيّن العبارات الصحيحة والعبارات الخطأ فيما يلي ، مع ذكر السبب :

أ) ٣ > ٢   ب) –٢ > ٠   جـ) –٢ < –٣

الحل :

أ) ٣ > ٢ عبارة صحيحة ، لأن ٣ على يمين العدد ٢ على خط الأعداد .

ب)–٢ > ٠ عبارة خاطئة ، لأن –٢ على يسار الصفر على خط الأعداد .

جـ) –٢ <–٣ عبارة خاطئة ، لأن –٢ على يمين العدد –٣ على خط الأعداد .

تمارين ومسائل

[١] عيّن العبارات الصحيحة والعبارات الخطأ فيما يلي ، مع ذكر السبب :

أ) ٥ > ٠   ب) ٤ > –٣   جـ) ٧ < –٣ ،

ء) –٥ > ٠   هـ) –٥ > ٨   و) –١٢ = ١٢ .

[٢] ضع أحد الرموز > أو < أو = في ☐ كي تصبح العبارة صحيحة في كل مما يلي :

أ) ٢ ☐ ٤   ب) ٤ ☐ –٤   جـ) صفر ☐ –٩

ء) ٨٢ ☐ ٦٦   هـ) –٢٥ ☐ –٢٥   و) ٢٤٧ ☐ –٢٤٩

[٣] رتب الأعداد التالية ترتيباً تصاعدياً :

أ) ٧ ، –٢ ، صفر ، ٥ ، –٤   ب) ٢٠ ، ١٥ ، –٣٢ ، –١٢ ، ١٧

[٤] رتب الأعداد التالية ترتيباً تنازلياً

أ) صفر، ١ ، –١ ، ٢ ، –٢   ب) ٨ ، –٨ ، ٢٥ ، ٥ ، –٥

[٥] أكمل النمط : أ) –٧ ، –٥ ، –٣ ، ... ، ... ، ..... ، ٥

جـ) ٦ ، ٣ ، صفر ، ... ، ... ، ..... ، –١٢

هـ) ٢٠٠ ، ١٥٠ ، ١٠٠ ، ... ، .....، .....، –١٠٠

٢ : ٤ جمع الأعداد الصحيحة

القيمة المطلقة للعدد :

إن العدد الطبيعي ٣ يسمى القيمة المطلقة للعددين الصحيحين (+ ٣)،(-٣) ؛

ونكتبها رمزياً : |+٣| = ٣ ، |–٣| = ٣

تدريب

أوجد القيم المطلقة للأعداد ٦ ، –٤ ، –٩ ، ١٢ ، ٥ ، –٥ .

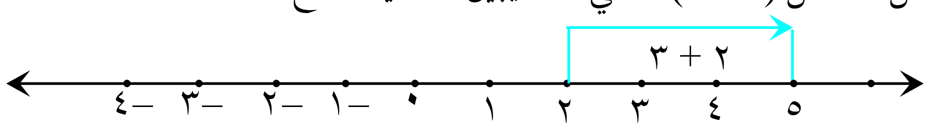
| ٦ | = ... ، |–٤| = ... ، |–٩| = ...

|١٢| = ... ، | ٥ | = ... ، |–٥| = ...

تعلمت من دراستك السابقة تمثيل عملية جمع الأعداد الطبيعية على خط الأعداد .

هل بإمكانك تمثيل عملية جمع الأعداد الصحيحة على خط الأعداد؟

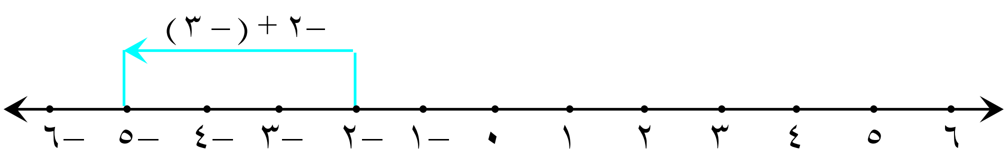
تأمل الشكل (٢–٩) التالي؛ أنه يبين عملية جمع : ٢ + ٣ = ٥



شكل (٢–٩)

بدأنا بتحديد النقطة التي تمثل العدد ٢ ، ثم تحركنا إلى اليمين بمقدار ثلاث وحدات ؛ فوصلنا إلى النقطة التي تمثل المجموع وهو (٥)

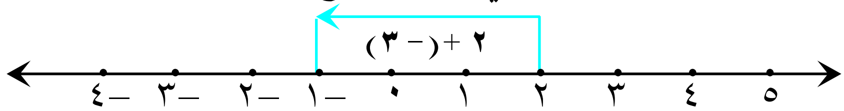
ويبين الشكل (٢–١٠) التالي عملية جمع –٢ + (–٣) = –٥



شكل (٢–١٠)

لقد بدأنا بتحديد النقطة التي تمثل العدد (–٢) ، ثم تحركنا إلى اليسار بمقدار ثلاث وحدات ؛ فوصلنا إلى النقطة التي تمثل المجموع وهو (–٥)

ويبين الشكل (٢–١١) التالي عملية جمع ٢ + (–٣) = –١



شكل (٢–١١)

تلاحظ أننا بدأنا بتحديد النقطة التي تمثل العدد ٢ ، ثم تحركنا إلى اليسار بمقدار ثلاث وحدات ؛ فوصلنا إلى النقطة التي تمثل المجموع وهو (– ١) .

نستنتج مما سبق :

١) مجموع عددين صحيحين موجبين هو عدد صحيح موجب ، ويساوي مجموع العددين .

٢) مجموع عددين صحيحين سالبين هو عدد صحيح سالب ، يساوي مجموع العددين .

٣) مجموع عددين صحيحين أحدهما سالب والآخر موجب هو عدد صحيح ، يساوي الفرق بين العددين ، وإشارته إشارة أكبرهما من حيث قيمته المطلقة .

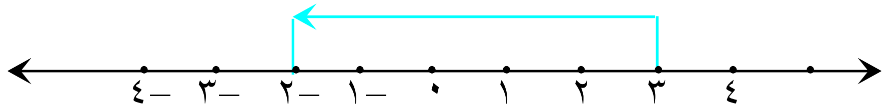
مثال (١)

استخدم خط الأعداد لتمثيل العمليات التالية ، وأوجد الناتج :

أ) ٣ + (–٥) ب) (–٢) + (–٤) جـ) (–٧) + ٣

الحل :

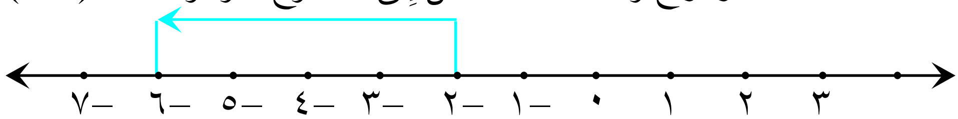
أ) نرسم خط الأعداد ونحدّد عليه العدد ٣ ، ثم نتحرك إلى اليسار خمس وحدات ، فنصل إلى المجموع ، وهو العدد (−٢) .



شكل (٢−١٢)

∴ ٣ + (−٥) = −٢

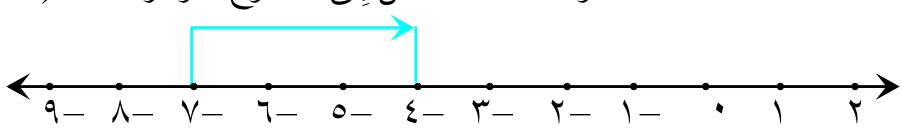
ب) نرسم خط الأعداد ونحدّد عليه العدد (−٢) ، ثم نتحرك إلى اليسار أربع وحدات ، فنصل إلى المجموع ، وهو العدد (−٦) .



شكل (٢−١٣)

∴ (−٢) + (−٤) = −٦

جـ) نرسم خط الأعداد ونحدّد عليه العدد (−٧) ، ثم نتحرك إلى اليمين ثلاث وحدات ؛ فنصل إلى المجموع ، وهو العدد (−٤)



شكل (٢−١٤)

∴ (−٧) + ٣ = −٤

مثال (٢)

أوجد المجموع لكل مما يأتي :

أ) ٢٧ + ٣٢ ب) ٣٦ + (−٢٢)

جـ) (−٩٢) + ٤٥ ء) (−٤٧) + (−٢٣)

الحـل : بتطبيق قواعد جمع الأعداد الصحيحة ، نحصل على :

أ) ٢٧ + ٣٢ = ٥٩ ب) ٣٦ + (–٢٢) = ١٤

جـ) (–٩٢) + ٤٥ = –٤٧ ء) (–٤٧) + (–٢٣) = –٧٠

تمارين ومسائل

[١] مثِّل العمليات التالية على خط الأعداد ، وأوجد المجموع :

أ) ٤ + (–٢) ب) ٣ + (–٦) جـ) (–٤) + ٣

ء) (–٥) + ٨ هـ) (–٣) + (–١) و) (–٢) + (–٤)

[٢] اكتب القيمة المطلقة لكل مما يأتي :

أ) ٣٢ ب) –٦٤ جـ) –٢٤٧

ء) ٣٥ هـ) –٣٥ و) –١٠٣

[٣] أوجد مجموع العمليات التالية :

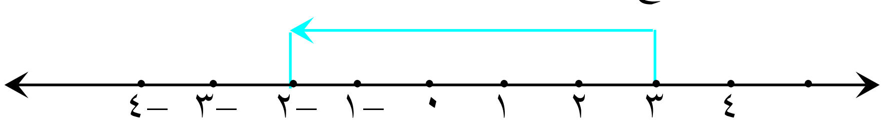
أ) ٥ + (–٣) ب) (–٨) + ٤ جـ) (–٨) + (–٧)

ء) ١٢ + (–٦٣) هـ) ٤٨ + (–٢٦) و) (–٩٤) + (–٥١)

ز) (–٦٣) + (–٤٧) ح) (–٩٥) + ٨٣ ط) (–٣٢) + ٨٧

[٤] اكتب عمليات الجمع الممثّلة بالأشكال (٢–١٥ أ ، ب ، جـ) الآتية :

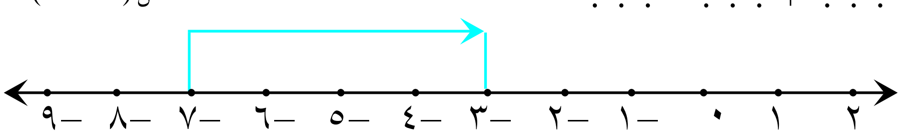
أ)



شكل (٢–١٥ أ)

. . . + . . . = . . .

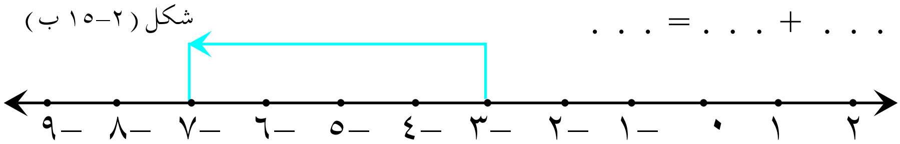
ب)



شكل (٢–١٥ ب)

. . . + . . . = . . .

جـ)



شكل (٢–١٥ جـ)

. . . + . . . = . . .

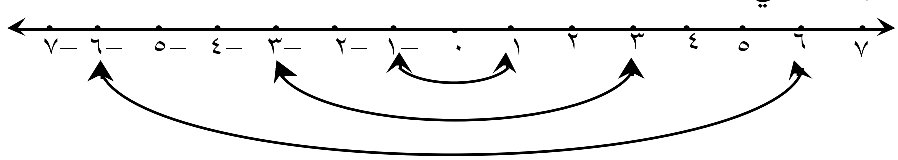
[٥] ما هو العدد الذي إذا أضيف إلى (–١٧) ،كان الناتج يساوي ١٢ ؟

[٦] ما هو العدد الذي إذا أضيف إلى ١٩ ، كان الناتج يساوي ١١ ؟

[٧] ما هو العدد الذي إذا أضيف إلى (–١٤) ، كان الناتج يساوي (–٣٢) ؟

٢ : ٥ طرح الأعداد الصحيحة

النظير الجمعي :



شكل (٢–١٦)

تأمل الشكل (٢–١٦) ، تلاحظ أن :

العدد (١) يقع إلى اليمين من الصفر، والعدد (–١) يقع إلى اليسار من الصفر .

والعدد (٣) يقع إلى اليمين من الصفر، بينما العدد (–٣) يقع إلى اليسار من الصفر .

وبالمثل فإن العدد (٦) يقع إلى اليمين من الصفر ، والعدد (–٦) يقع إلى اليسار من الصفر .

وهكذا فإن لكل عدد صحيح معكوس على خط الأعداد . ويقع العدد ومعكوسه على بعدين متساويين عن يمين ويسار الصفر، ويسمى هذا المعكوس بالنظير الجمعي .

تدريب (١)

باستخدام خط الأعداد ، اذكر النظير الجمعي للأعداد :

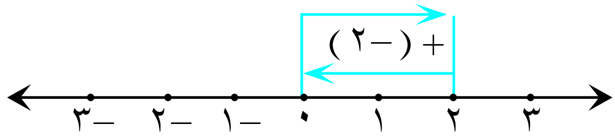
١ ، (–٣) ، (–٤) ، ٥

مثـال

باستخدام خط الأعداد ، أوجد ناتج جمع ما يلي :

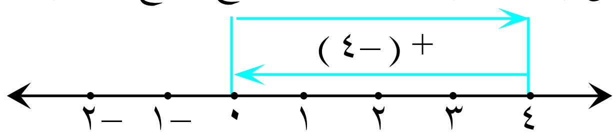
أ) ٢ + (–٢) ب) ٤ + (–٤) جـ) –٧ + ٧

الحل :



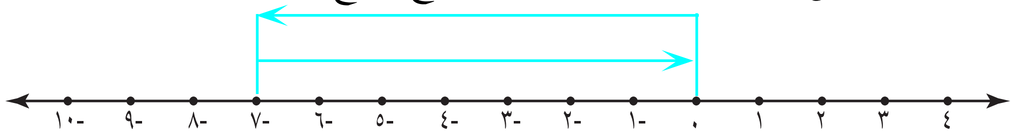
شكل (٢–١٧أ)

من الشكل (٢–١٧أ) : نلاحظ أن ناتج جمع ٢ + (–٢) = ٠



شكل (٢–١٧ب)

من الشكل (٢–١٧ب) : نلاحظ أن ناتج جمع ٤ + (–٤) =٠



شكل (٢–١٧جـ)

من الشكل (٢–١٧جـ) : نلاحظ أن ناتج جمع –٧ + ٧ =٠

مما سبق يتضح أن :

مجموع العدد ونظيره الجمعي يساوي صفر ؛
أي أنه : إذا كان أ ، –أ ∋ ص ؛ فإن أ + (–أ) = (–أ) + أ = ٠
العدد صفر هو النظير الجمعي للعدد صفر .

طرح الأعداد الصحيحة :

قارن بين الناتجين في كل من العمود (أ)، والعمود (ب)

(أ)	(ب)
٥ – ٤ = ١	٥ + (–٤) = ١
–٢ –٣ = –٥	–٢ + (–٣) = –٥
٦ – ١ = ٥	٦ + (–١) = ٥

ماذا تلاحظ ؟

تلاحظ أن كل عملية طرح في العمود (أ) حولت إلى عملية جمع في العمود (ب) وذلك بإضافة النظير الجمعي للمطروح إلى المطروح منه . وهذا يعني أنه يمكن أن نجري أي عملية طرح بإضافة النظير الجمعي للعدد المطروح إلى العدد المطروح منه .

مثال (١)

اكتب ما يلي على صورة جمع:

أ) ١٥ − ١٢ ب) −١٤ −(−٧) جـ) ٩ − (−٤)

الحل:

أ) ١٥ + (−١٢) ب) −١٤ + ٧ جـ) ٩ + ٤

مثال (٢)

أوجد ناتج طرح ما يلي:

أ) ١٢ − ٦ ب) ٥ − ٨ جـ) ٤ − (−٢)

الحل:

أ) ١٢ + (−٦) = ٦ ب) ٥ + (−٨) = −٣ جـ) ٤ + ٢ = ٦

تمارين ومسائل

[١] أ) اكتب النظير الجمعي لكل من الأعداد التالية :

−١ ، ٣ ، −٧ ، ٢٩ ، ٢٣ ، ٢٥ ، −١٠٠٠

ب) ما مجموع كل عدد من الأعداد السابقة مع نظيره الجمعي ؟

[٢] استخدم خط الأعداد لإيجاد ناتج مايلي :

أ) ٢ – ٣   ب) –٣ –٢   جـ) –٤ –(–١) ، هـ)–٩– (–٤)

[٣] حوّل عمليات الطرح التالية إلى عمليات جمع ثم أوجد الناتج :

أ) ١٥ – ١١   ب) –٢٥ –(–١٧)   جـ) ١٩ – ٢٤

د) –٤٥– ٢٧   هـ) ٤٥ – (–٢٦)   و) ٥٩– (–١١)

ز) ٠ – ١٨   ح) ٠– (–١٢)   ط) –١٠٠–(–٩)

[٤] أوجد ناتج ما يلي :

أ) ٢٨ – ١٢   ب) ٥٤ – (–٢٤)   جـ) –٣٥ –١٣

ء) –١٠٠٠ –(–٤٧)   هـ) ٠ – (–١٧)   و) ١٥٠٠ – (–٦٠٠)

ز) –٤٥٨ –(–٦٩٢)   ح) –٧٢١٨ – ٥٧٨٩   ط) ٩٥٤٢٨–١٨٣٧٦

[٥] اطرح ٧٥ من (–٢٢٠)

[٦] اطرح –٢٣ من ٣١٥

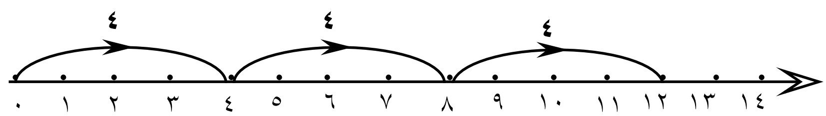
٢ : ٦ ضرب وقسمة الأعداد الصحيحة

أولاً : ضرب الأعداد الصحيحة :

عرفت فيما سبق أن : ٣ × ٤ = ١٢ هي عبارة عن اختصار للجمع المتكرر :

٤ + ٤ + ٤ = ١٢ ، أو ٣+ ٣ + ٣+٣ = ١٢

وتمثل هذه العملية على خط الأعداد كما في الشكل (٢ – ١٨) التالي :



شكل (٢–١٨)

ملاحظة :

عند تمثيل حاصل ضرب عددين صحيحين على خط الأعداد لابد أن تكون نقطة البداية دائماً الصفر .

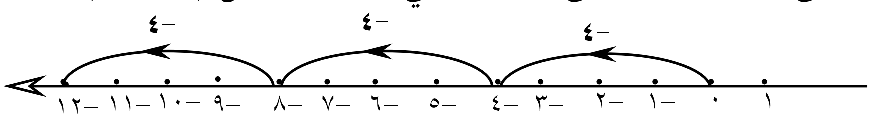
تدريب (١)

مـثّل ٤ × ٣ على خط الأعـداد في دفـتـرك .

وكذلك عملية ضرب العدد ٣ × (–٤)

= (–٤) + (–٤) + (–٤) = –١٢

وترسم على خط الأعداد على النحو التالي [انظر الشكل (٢–١٩)] :



شكل (٢–١٩)

و ٤ × (–٣) = (–٣) + (–٣) + (–٣) + (–٣) = –١٢

تدريب (٢)

مثّل (–٤) × ٣ على خط الأعداد في دفترك .

نشاط

أكمل النمط :

(أ)

٤ × ٣	١٢
٤ × ٢	٨
٤ × ١	
٤ × ٠	
٤ × (–١)	
٤ × (–٢)	
٤ × (–٣)	

(ب)

(–٤) × ٣	–١٢
(–٤) × ٢	–٨
(–٤) × ١	
(–٤) × ٠	
(–٤) × (–١)	
(–٤) × (–٢)	
(–٤) × (–٣)	

من خلال التأمل فيما سبق نستنتج أن :

حاصل ضرب أي عدد موجب في عدد سالب هو عدد سالب .
وحاصل ضرب أي عدد سالب في عدد موجب هو عدد سالب .
وحاصل ضرب أي عدد سالب في عدد سالب هو عدد موجب .
وحاصل ضرب أي عدد موجب في عدد موجب هو عدد موجب .

مثال أوجد حاصل ضرب ما يلي :

١) ٥ × (–٤) ٢) (–٦) × ٧ ٣) (–٩) × (–٨)

الحل :

١) ٥ × (–٤) = –٢٠
٢) (–٦) × ٧ = –٤٢
٣) (–٩) × (–٨) = ٧٢

تمارين ومسائل

[١] أوجد ناتج ما يلي :

أ) ٥ × ٥ ب) (–٩) × ٦
جـ) ١٨ × (–٦) ى) (–٢٠) × (–٢٠)
هـ) (–١٢) × ٠ و) (–٥٠٠) × (–٥٠)

[٢] احسب ما يلي :

أ) (–١٢) × ٣١٨ ب) ٢٥ × (–٦٢٩)
جـ) (–٣٠) × (–٢٥٠٠) ى) (–٢١٠) × (–٥٤٦٠)

[٣] أكمل جدول حاصل الضرب التالي :

×	-٤	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣	٤
٤	-١٦								
٣						٣			
٢		-٦							
١									٤
٠			٠						
-١				١					
-٢							-٤		
-٣					٠				
-٤								-١٢	

[٤] ما حاصل ضرب :

أ) ١٨ في (-٤٢٠)

ب) (-٤٢) في ٧١٨

جـ) (-١٢٠) في (-٨٥٠)

ثانياً : قسمة الأعداد الصحيحة :

تأمل ما يلي : ٢٤ ÷ ٣ = ٨ ، لأن ٨ × ٣ = ٢٤

تعلم من دراستك السابقة أن القسمة عملية عكسية للضرب ؛ فإذا أردت أن تقسم (-٣٠) ÷ ٥، فإنك تبحث عن العدد الذي إذا ضربته في العدد (٥) نحصل على العدد (-٣٠) . وهذا العدد هو (-٦)

وهكذا نجد أن :

(–٣٠) ÷ ٥ = –٦ ، لأن ٥ × (–٦) = –٣٠

و (–٣٠) ÷ (–٦) = ٥ ، لأن (–٦) × ٥ = –٣٠

و ٣٠ ÷ (–٦) = –٥ ، لأن (–٦) × (–٥) = ٣٠

مما سبق تستنتج أن :

خارج قسمة عدد موجب على عدد سالب هو عدد سالب . **وخارج قسمة عدد سالب على عدد موجب هو عدد سالب .** **وخارج قسمة عدد سالب على عدد سالب هو عدد موجب .** **وخارج قسمة عدد موجب على عدد موجب هو عدد موجب .**

مثــال أوجد خارج قسمة ما يلي ، وتحقق من إجابتك :

١) ٨٤ ÷ (–٧)

٢) (–٩٩) ÷ ١١

٣) (– ١٥٠) ÷ (–١٥)

الحـل :

١) ٨٤ ÷ (–٧) = –١٢ ، لأن (–١٢) × (–٧) = ٨٤

٢) (–٩٩) ÷ ١١ = – ٩ ، لأن ١١ × (–٩) = – ٩٩

٣) (–١٥٠) ÷ (–١٥) = ١٠ ، لأن ١٠ × (–١٥) = – ١٥٠

تمارين ومسائل

[١] أوجد خارج قسمة ما يلي :

أ) ٢٥ ÷ (–٥)   ب) (–١٢) ÷ ٦   جـ) (–٣٢) ÷ (–٨)

ء) ٣٠ ÷ ٦   هـ) ٠ ÷ (–٢)   و) (–٤٤) ÷ (–١١)

[٢] احسب :

أ) (–٦٧٥) ÷ (–٩)   ب) (–٣٩٦٨) ÷ ١٦

جـ) (–١٠١٥٢) ÷ (–١٨)   ء) ٢٦٠٤٤ ÷ (–١٧)

[٣] أكمل الجدول التالي :

المقسوم / المقسوم عليه	٢٥٢	(–٧٥٦)	(–٥٠٤)	١٢٦٠
(–٧)	–٣٦			
٩				
(–١٢)				

[٤] اقسم –١٨٢ على –١٤

[٥] أوجد ناتج قسمة : –٣٧٥ على ١٥

٢ : ٧ خواص العمليات على الأعداد الصحيحة

أولاً : خاصية الانغلاق :

تأمل ما يلي ، ماذا تلاحظ ؟

٤ + (–٧) = –٣ ، –٣ + ١٠ = ٧ ، –٦ + (–٥) = –١١ ،

–٧ –٨ = –١٥ ، ٦ – (–٧) = ١٣ ، –١٠ – (–٩) = –١ ،

٦ × (–٤) = –٢٤ ، (–٢) × ٤ = –٨ ، (–٥) × (–٦) = ٣٠

تلاحظ أن :

ناتج العمليات السابقة أعداد صحيحة

ولذلك نقول إن مجموعة الأعداد الصحيحة (ص) مغلقة تحت كل من العمليات التالية : ١) جمع الأعداد الصحيحة .

٢) طرح الأعداد الصحيحة .

٣) ضرب الأعداد الصحيحة .

أي أنه :

> لكل ا ، ب ∈ ص ، فإن :
>
> (ا + ب) ∈ ص ، (ا − ب) ∈ ص ، (ا × ب) ∈ ص

هل مجموعة الأعداد الصحيحة مغلقة على عملية القسمة؟

للإجابة على هذا السؤال تأمل ما يلي :

٤٥ ÷ (−٩) = −٥ ، ٢٧ ÷ ٤ = $\frac{٣}{٤}$٦

لاحظ أن خارج قسمة ٢٧ ÷ ٤ ليس عدداً صحيحاً ؛ ولذلك نقول إن مجموعة الأعداد الصحيحة ص ليست مغلقة على عملية القسمة .

ثانياً : خاصية الإبدال :

تأمل ما يلي ؛ ماذا تلاحظ ؟

١) ٨ + ٣ = ١١ ، ٣ + ٨ = ١١

٢) ٧ + (−٩) = −٢ ، −٩ + ٧ = −٢

٣) −٦ + ٨ = ٢ ، ٨ + (−٦) = ٢

٤) ٣ × ٧ = ٢١ ، ٧ × ٣ = ٢١

٥) ٤ × (–٢) = –٨ ، (–٢) × ٤ = –٨

٦) (–٥) × ٣ = –١٥ ، ٣ × (–٥) = –١٥

٧) (–٤) × (–٩) = ٣٦ ، (–٩) × (–٤) = ٣٦

تـلاحـظ أن :

١) ٨ + ٣ = ٣ + ٨

٢) ٧ + (–٩) = –٩ + ٧

٣) –٦ + ٨ = ٨ + (–٦)

٤) ٣ × ٧ = ٧ × ٣

٥) ٤ × (–٢) = (–٢) × ٤

٦) (–٥) × ٣ = ٣ × (–٥)

٧) (–٤) × (–٩) = (–٩) × (–٤)

إذن عمليتي الجمع والضرب إبداليتان في مجموعة الأعداد الصحيحة .

أي أنه :

لكل ا ، **ب** ∈ ص ، **فإن** :
ا + **ب** = **ب** + ا ، ا × **ب** = **ب** × ا .

هل عملية طرح الأعداد الصحيحة إبدالية؟ أَعطِ مثالاً يوضح ذلك .

هل عملية قسمة الأعداد الصحيحة إبدالية؟ أَعطِ مثالاً يوضح ذلك .

ثالثاً : خاصية التجميع :

أ) جمع الأعداد الصحيحية :

تأمل مايلي ؛ ماذا تلاحظ ؟

(–٧ + ٥) + (–٤)	(–٧) + (٥ + (–٤))
(–٢) + (–٤)	(–٧) + ١
–٦	–٦

(٤ + (–٩)) + ٨	٤ + ((–٩) + ٨)
(–٥) + ٨	٤ + (–١)
٣	٣

تلاحظ أن :

(–٧ + ٥) + (–٤) = (–٧) + (٥ + (–٤))

تلاحظ أن :

(٤ + (–٩)) + ٨ = ٤ + ((–٩) + ٨)

أي أنه :

إذا كانت أ ، ب ، جـ أعداداً صحيحة ، فإن :

(أ + ب) + حـ = أ + (ب + جـ)

تسمى هذه الخاصية خاصية التجميع بالنسبة لعملية جمع الأعداد الصحيحة .

ب) ضرب الأعداد الصحيحة

تأمل ما يلي : ماذا تلاحظ ؟

(٤ × (–٩)) × ٢	٤ × ((–٩) × ٢)
(–٣٦) × ٢	٤ × (–١٨)
–٧٢	–٧٢

(–٧ × ٣) × (–٤)	(–٧) × (٣ × (–٤))
(–٢١) × (–٤)	(–٧) × (–١٢)
٨٤	٨٤

تلاحظ أن :

(٤ × (–٩)) × ٢ = ٤ × ((–٩) × ٢)

تلاحظ أن :

(–٧ × ٣) × (–٤) = (–٧) × (٣ × (–٤))

أي أنه :

إذا كانت ﺃ ، ب ، جـ أعداداً صحيحة ، فإن :
(ﺃ × ب) × جـ = ﺃ × (ب × جـ) .

وتسمى هذه الخاصية خاصية التجميع بالنسبة لعملية ضرب الأعداد الصحيحة .

هل عملية قسمة الأعداد الصحيحة تجميعية؟ أَعطِ مثالاً يوضح ذلك .

رابعاً : خاصية التوزيع :

تأمل ما يلي ؛ ماذا تلاحظ ؟

(أ)

(–١٢) × (٦ + ٥)	(–١٢ × ٦) + (–١٢ × ٥)
(–١٢) × ١١	(–٧٢) + (–٦٠)
–١٣٢	–١٣٢

تلاحظ أن:

(–١٢) × (٦ + ٥) = (–١٢ × ٦) + (–١٢ × ٥)

(ب)

(–٧) × ((–١٠) + (–٧))	((–٧) × (–٧)) + ((–٧) × (–١٠))
(–٧) × (–١٧)	٤٩ + ٧٠
١١٩	١١٩

تلاحظ أن:

(–٧) × ((–١٠) + (–٧)) = ((–٧) × (–٧)) + ((–٧) × (–١٠))

أي أنه :

> **إذا كانت أ ، ب ، جـ أعداداً صحيحة ؛ فإن :**
>
> **أ × (ب + جـ) = (ب + جـ) × أ = (أ × ب) + (أ × جـ)**

نسمي هذه الخاصية خاصية توزيع الضرب على الجمع .

خامساً : العنصر المحايد :

تأمل ما يلي ؛ ماذا تلاحظ ؟

٧ + ٠ = ٧ ، ٠ + ٧ = ٧

(–١٢) + ٠ = –١٢ ، ٠ + (–١٢) = –١٢

تلاحظ أن :

٧ + ٠ = ٠ + ٧ = ٧ ، (–١٢) + ٠ = ٠ + (–١٢) = (–١٢)

أي أنه :

> **لكل أ ∈ ص ؛ فإن :**
>
> أ + ٠ = ٠ + أ = أ

الصفر هو العنصر المحايد الجمعي .

تأمل ما يلي ؛ ماذا تلاحظ ؟

(–١٥) × ١ = –١٥ ، ١ × (–١٥) = –١٥

٨ × ١ = ٨ ، ١ × ٨ = ٨

تلاحظ أن :

(–١٥) × ١ = ١ × (–١٥) = –١٥ ، ٨ × ١ = ١ × ٨ = ٨

أي أنه :

لكل أ ∈ ص ؛ فإن :

أ × ١ = ١ × أ = أ

الواحد هو العنصر المحايد الضربي .

تمارين ومسائل

[١] أو جد ناتج ما يلي، حدّد أيّاً من العمليات إبدالية :

أ) ٢٥ – ٣٢ ب) (–٧٤) + ٢٢

جـ) –١١٢ + (–٤٨) د) –٥٦ ÷ (–٧)

هـ) ٣٤ × (–١٥) و) (–١٢) × (–٦٤)

[٢] استخدم خاصية التجميع في إيجاد ناتج ما يلي :

أ) ١٠٥ + (–١٠٠) + (–٢٥) ب) –٢١٨ + ٥١٩ + ٢٠٠

جـ) –٤٣٢ + ٥١٣ + (–٩٨) د) (–١٢) × ١٨ × ١٠

هـ) ٢٥ × (–١٣) × (–٢٠٠) و) (–١٨) × ٢٠ × (–٢٤)

[٣] استخدم خاصية التوزيع في إيجاد ناتج ما يلي :

أ) ٢١ × (٧+ ٢٠) ب) ١٧ × (٤ + ١٠)

جـ) ٢٥ × (١٥ + (–٥)) د) (–١٤) × (–٢٩ –(–٩))

هـ) (–٥) × (–٣٠٨) و) ٢٧ × ٢٠٠٥

٢ : ٨ الأسس (القوى)

تعلم من دراستك السابقة أن : $٣ \times ٣ = ٣^{٢}$

$٥ \times ٥ \times ٥ \times ٥ = ٥^{٤}$

وبالمثل عندما نضرب عدداً سالباً في نفسه عدة مرات فإننا نكتبه على النحو التالي : $(-٥) \times (-٥) \times (-٥) \times (-٥) = (-٥)^{٤}$

وبصورة عامة :

> **إذا كان : ا ∈ ص ، د* ∈ ط ؛ فإن :**
>
> **ا × ا × ا × ا .... د من المرات = $ا^{د}$ وتقرأ ا أس د**
>
> **أو ا مرفوع للقوة د يسمى (ا) الأساس ، (د) الأس .**

مثال (١) اكتب ما يلي على شكل قوى :

أ) $٣ \times ٣ \times ٣ \times ٥ \times ٥$

ب) $٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times (-٧) \times (-٧) \times (-٧)$

الحل :

أ) $٣ \times ٣ \times ٣ \times ٥ \times ٥ = ٣^{٣} \times ٥^{٢}$

ب) $٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times (-٧) \times (-٧) \times (-٧) = ٢^{٤} \times (-٧)^{٣}$

مثال (٢) احسب قيمة كل مما يلي :

أ) $٢^{٣} \times ٣^{٢}$

ب) $٣^{٢} \times (-٥)^{٣}$

جـ) $ا^{٣}$ إذا كان $ا = -٤$

الحل :

أ) $٢^{٣} \times ٣^{٢} = ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٣ \times ٣ = ٨ \times ٩ = ٧٢$

ب) $٣^{٢} \times (-٥)^{٣} = ٣ \times ٣ \times (-٥) \times (-٥) \times (-٥)$

$= ٩ \times -١٢٥ = -١١٢٥$

جـ) $أ^{٣} = (-٤)^{٣} = (-٤) \times (-٤) \times (-٤) = (-٦٤)$

ضرب القوى المتحدة الأساسات :

عرفت أن : $٥^{٤} = ٥ \times ٥ \times ٥ \times ٥$ ،

$٥^{٣} = ٥ \times ٥ \times ٥$ ؛

$\therefore ٥^{٤} \times ٥^{٣} = ٥ \times ٥ \times ٥ \times ٥ \times ٥ \times ٥ \times ٥$

$= ٥^{٧}$

أي أن : $٥^{٤} \times ٥^{٣} = ٥^{٤+٣} = ٥^{٧}$

وبصورة عامة :

إذا كان $أ \in ص^{*}$ ، $ن$ ، $م \in ط$ ، **فإن** :

$أ^{ن} \times أ^{م} = أ^{ن+م}$

عند ضرب القوى المتحدة الأساسات نجمع أسسها

قسمة القوى المتحدة الأساسات :

كيف يمكن أن نوجد خارج قسمة $٣^{٩} \div ٣^{٥}$ ؟

تعلم أن : $٣^{٩} \div ٣^{٥} = \frac{٣^{٩}}{٣^{٥}} = \frac{٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣ \times \cancel{٣} \times \cancel{٣} \times \cancel{٣} \times \cancel{٣} \times \cancel{٣}}{\cancel{٣} \times \cancel{٣} \times \cancel{٣} \times \cancel{٣} \times \cancel{٣}}$ ،

فإذا اختصرنا من البسط بقدر المقام فإن خارج قسمة :

$$\frac{٣^{٩}}{٣^{٥}} = ٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣ = ٣^{٤}$$

أي أن : $٣^{٩} \div ٣^{٥} = ٣^{٩-٥} = ٣^{٤}$

وبصورة عامة :

> **إذا كان $أ \in ص^{*}$ ، $ن ، م \in ط$ ؛ فإن :**
>
> $أ^{ن} \div أ^{م} = \frac{أ^{ن}}{أ^{م}} = أ^{ن-م}$ ، $ن \geq م$

عند قسمة القوى المتحدة الأساسات نطرح أسسها .

مثال (٣)

أوجد ناتج ما يلي :

أ) $٢^{٧} \times ٢^{٥}$

ب) $٧^{٦} \div ٧^{٣}$

جـ) $(-٣)^{٤} \times (-٣)^{٣}$

د) $٢^{٤} \div ٢^{٤}$

الحل :

أ) $٢^{٧} \times ٢^{٥} = ٢^{٧+٥} = ٢^{١٢}$

ب) $٧^{٦} \div ٧^{٣} = \frac{٧^{٦}}{٧^{٣}} = ٧^{٦-٣} = ٧^{٣}$

جـ) $(-٣)^{٤} \times (-٣)^{٣} = (-٣)^{٤+٣} = (-٣)^{٧}$

د) $٢^{٤} \div ٢^{٤} = \frac{٢\times٢\times٢\times٢}{٢\times٢\times٢\times٢} = \frac{\cancel{١٦}^{١}}{\cancel{١٦}_{١}} = ١$ ؛

أي أن : $\frac{٢^{٤}}{٢^{٤}} = ٢^{٤-٤} = ٢^{٠} = ١$

مـــلاحظة : $\boxed{أ^{٠} = ١ ،\ أ \neq ٠}$

تمارين ومسائل

[١] اكتب ما يلي على شكل أسس :

أ) $٥ \times ٥ \times ٥ \times ٢ \times ٢ \times ٢$ ، ب) $٨ \times ٨ \times ٨ \times ٧ \times ٧ \times ٧$ ،

جـ) $(-٤) \times (-٤) \times (-٤) \times (-٤) \times (-٦) \times (-٦) \times (-٦) \times (-٦)$

[٢] اكتب ما يلي كحاصل ضرب :

أ) $٩^{٢}$ ب) $(-٥)^{٦} \times ١١^{٤}$ جـ) $٧^{٤} \times ١٢^{٨}$

[٣] احسب قيمة كل مما يلي :

أ) $٧^{٢}$ ب) $(-٥)^{٤}$ جـ) $٩^{٢} \times ٢^{٣}$

ء) $(-٦)^{٢} \times (-٥)^{٢}$ هـ) $(-٢)^{٥} \times ١^{٤}$

و) $٤^{٣} \times (-٧)^{٣}$ ز) $(-٣)^{٢} \times ٢^{٣}$

[٤] حلل الأعداد التالية إلى عواملها الأولية ، ثم اكتبها على شكل قوى :

أ) ٨٦٤ ب) ١٨٠٠٠ جـ) ١٩٢٠٨

[٥] أوجد ناتج ما يلي :

أ) $٧^{٣} \times ٧^{٥}$ ب) $(-٢)^{١٢} \times (-٢)^{١٥}$ جـ) $٤^{٣} \times ٤$

ء) $(-٣)^{٦} \times (-٣)^{٤} \times (-٣)^{٨}$ هـ) $٢٣^{١٢} \div ٢٣^{٨}$

و) $(-٥)^{٣} \times (-٥)^{٦} \div (-٥)^{٤}$ ز) $٦^{٩} \times ٦^{٣} \div ٦^{١٢}$

ح) $١١^{٣} \times ١١^{٢} \times ١١^{٤} \div ١١^{٥}$ ي) $(-٨)^{٧} \times (-٨)^{٩} \div (-٨)^{١٥}$

[٦] إذا كان : $\text{أ} = (-٦)$ ، $\text{ن} = ٥$ ، $\text{م} = ٣$

فأوجد ناتج : أ) $\text{أ}^{\text{ن}} \times \text{أ}^{\text{م}}$ ب) $\text{أ}^{\text{ن}} \div \text{أ}^{\text{م}}$

٢ : ٩ تمارين عامة

[١] اكتب النظير الجمعي لكل من الأعداد التالية :

+١٩ ، (−٥٠) ، ٠ ، +٩٨ ، +١٠٩ ، (−٩٧٠)

[٢] ضع < أو > أو = في ☐ لتجعل العبارات التالية صحيحة :

أ) −٣٨ ☐ −٢٥ ب) −٣٤ ☐ −٣٤

جـ) ٧٢ ☐ −٧٢ ء) ٢٧ ☐ −١٦

[٣] استخدم خط الأعداد لإيجاد ناتج ما يلي :

أ) (−٨) + ٤ ب) ١٠ − (+٨)

جـ) ٥ − (−٤) ء) −٧ + (−٣)

[٤] أوجد ناتج ما يلي :

أ) ٧٢٨ + (–٤٢٥)
ب) ٦٣٢ + (–٩٨٢)

جـ) ٦١٩ – (–٨٣٢)
ء) –١٧٣ – (١٥٢)

هـ) ٧٠ ÷ (–٥)
و) –٨٣٢ ÷ (–٤)

ز) ١٢ × (–٣)
ح) (–١٧) × (–٥)

[٥] استخدم خاصية التوزيع لإيجاد ناتج ما يلي :

أ) ٨ × (١٥ + ٣٢)
ب) ١١ × (–٣٨٢)

جـ) ٥٤٢ × –١٢
ء) ٥٥ × ٢٢

[٦] أوجد ناتج ما يلي :

أ) ٨^{٢} × ٣^{٢}
ب) ٦^{٢} × ٤^{٢}
جـ) ٣^{٢} × ٣^{٤}

ء) ٦^{٤} ÷ ٦^{٣}
هـ) ١٦^{٢} × –١٦^{٢}
و) ٣٢^{٨} ÷ ٣٢^{٦}

[٧] اطرح ٩٥ من –٦٢

[٨] أضف (– ٢٠) إلى (–٦٥)

[٩] اقسم – ٣٢ على ٤

[١٠] أوجد حاصل ضرب (–١٠) في ١٢

٢ : ١٠ اختبار الوحدة

[١] ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة ، وعلامة (✗) أمام العبارات الخطأ لكل مما يأتي :

أ) $-٤ \in$ صـ   ب) $-٢ \in$ صـ$^-$

جـ) $-١٨ \notin$ ط   ء) $\{١ ، ٠ ، -١\} \in$ صـ$^+$

هـ) ط $\subset$ صـ$^+$ و) $\{٢ ، ٤\} \subset$ ط

[٢] ضع $<$ أو $>$ أو $=$ في $\square$ لتجعل العبارات التالية صحيحة :

أ) $-١٢ \;\square\; -٢٤$ ب) $-٧ \;\square\; ٧$

جـ) ط $\square$ صـ$^+ \cup \{٠\}$.

[٣] مثِّل العمليات التالية على خط الأعداد :

أ) $(-٤) + (-٢) = -٦$ ب) $(-٣) + ٧ = ٤$

[٤] أوجد ناتج ما يلي :

أ) $٧ + (-٥)$ ب) $(-٥) - (+٩)$

جـ) $٦ \times (-٤)$ ء) $(-٢) \times (-١٢)$

هـ) $(-٣٢) \div ٨$ و) $(-٤٢) \div (-٦)$

[٥] أوجد ناتج ما يلي بأبسط الطرق :

أ) $٤٨ + ١٢ - ٣٦$ ب) $٣٥ \times (٤ + ٣)$ جـ) $(١٢ \times ٧) + (١٢ \times ٣)$

[٦] احسب قيمة ما يلي :

أ) $(-٧)^٢$ ب) ٤×٤^٢

جـ) $(-٢)^٣$ ء) $٨^٦ \div ٨^٤$

٣ : ١ الحدود الجبرية

الحد الجبري:

تعلم أنه: إذا كان طول ضلع مربع ٥ سم ؛ فإن: محيطه = ٤ × ٥سم.

وإذا كان طول ضلع مربع ٧,٥سم فإن : محيطه = ٤ × ٧,٥سم.

وإذا أردنا أن نعبر بشكل عام عن محيط مربع مهما كان طول ضلعه ، فإننا نرمز لطول ضلعه بحرف وليكن "ل" سم ؛ فيكون محيطه = ٤ × ل سم.

وإذا كان لدينا مستطيل : طوله س سم وعرضه ص سم ؛ فإن:

محيطه = ٢ × س + ٢ × ص سم

أو محيط المستطيل = ٢ × (س + ص) سم

ومساحة المستطيل = س × ص سم^{٢}

وإذا كان ثمن كراسة ٤٠ ريال فإن ثمن ٥ كراسات = ٥ × ٤٠ ريال .

فإذا اشترى محمد س كراسة فإن مقدار مايدفعه للبائع = ٤٠ × س ريالاً .

تلاحظ في الأمثلة السابقة أننا استخدمنا الأحرف لتمثل أعداداً .

تسمى هذه الأحرف متغيرات لأنها غير محددة القيمة ، ويمكن أن تأخذ أي قيمة عددية.

وعند استخدام الأعداد والمتغيرات في حاصل الضرب نحصل على تعابير جبرية، يسمى كل منها حداً جبرياً .

والتعبير الجبري (٤٠ × س) يكتب اختصاراً (٤٠س) حيث يسمى العدد ٤٠ المعامل ، والحرف س المتغير .

وبالمثل س × ص تكتب س ص ، معاملها واحد و س، ص هي المتغيرات.

ومثل هذه التعابير تسمى حدود جبرية.

الحد الجبري :

هو عبارة عن حاصل ضرب معامل في متغير أو أكثر .

وإذا اختفى المتغير من الحد الجبري نسمي العدد (المعامل) حداً مطلقاً

مثال (١)

اكتب مكونات الحدود الجبرية التالية :

$-٢٠ ص^{٢}$ ، ٥س ص ، ٣ ، ع ل ن ، $\frac{٣ ا}{ب}$ ل

الحل :

الحد الجبري	المعامل	المتغيرات
$-٢٠ ص^{٢}$	-٢٠	ص
٥ س ص	٥	س ، ص
٣	٣	لا يوجد
ع ل ن	١	ع ، ل ، ن
٣ $\frac{ا}{ب}$ ل	٣	ا ، ب ، ل

مثال (٢) اكتب ما يأتي في صورة حد جبري :

ا) ثمن خمسة أكياس قمح .

ب) ضعف عمر سعيد .

جـ) ٧ أمثال عدد .

الحل : ا) نفرض أن : ثمن كيس القمح = س ريال

∴ ثمن خمسة أكياس قمح = ٥ س ريال

ب) نفرض أن : عمر سعيد = ل سنة

∴ ضعف عمر سعيد = ٢ ل سنة

جـ) نفرض أن : العدد = ص

∴ ٧ أمثال العدد = ٧ ص

مثال (٣)

إذا كان طول مستطيل يساوي ل سم، وكان عرضه يساوي ربع طوله ؛ فما عرض المستطيل .

الحل: ∵ طول المستطيل = ل سم

فإن عرض المستطيل = $\frac{١}{٤}$ ل سم

قيمة الحد الجبري:

لقد سبق أن تعرفت على عملية التعويض في دراستك السابقة وتتمثل هذه العملية في استبدال المتغيرات بقيم عددية . وفيما يلي نعرض بعض الأمثلة لإيجاد القيمة العددية للحدود الجبرية .

مثال (٤)

إذا كان أ = ٢ ، ب = $\frac{١}{٢}$ ، جـ = −٣؛ فأحسب القيمة العددية لما يأتي:

أولاً: ٦ أ ب جـ ثانياً: ٥ $أ^{٢}$ ب جـ

الحل:

أولاً: القيمة العددية للحد الجبري: ٦ أ ب جـ = ٦ × ٢ × $\frac{١}{٢}$ × (−٣) = −١٨

ثانياً: القيمة العددية للحد الجبري: ٥ $أ^{٢}$ ب جـ = ٥ × $٢^{٢}$ × $\frac{١}{٢}$ × (−٣) = −٣٠

مثال (٥)

أوجد مساحة الدائرة التي نصف قطرها ٧سم ؛ ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

الحل :

مساحة الدائرة = π نق^{٢} = $\frac{٢٢}{٧} \times ٧^{٢}$

= $\frac{٢٢}{٧} \times ٧ \times ٧$ = ٢٢×٧ = ١٥٤ سم^{٢}

الحدود الجبرية المتشابهة :

تعرفت أن : $٣^{٢} = ٣ \times ٣$ ، $٥^{٣} = ٥ \times ٥ \times ٥$

نقول وبشكل عام إن س^{د} تعني أن الأساس هو س والأس د .

ويمكن تسمية الأس بدرجة الأساس أو المتغير .

أي أن : **درجة المتغير هي قيمة أس ذلك المتغير .**

ملاحظة : درجة متغير الحد المطلق تساوي صفر فمثلاً :

٩ = ٩ × س^{صفر} ، س $\neq$ ٠

تأمل الآن الحدود الجبرية التالية :

٥س ، ٢٩ س ، −٣٠ س تسمى حدود جبرية متشابهة ، لأن لها المتغير نفسه والدرجة نفسها .

والحدود : ص^{٣} ، ٣ ص^{٣}، −٢٥ ص^{٣} أيضاً متشابهة ، لأن لها المتغير نفسه والدرجة نفسها .

وكذلك الحدود : ٢س^{٢} ص ، ٥ س^{٢} ص ، ٣ ص س^{٢} ، ص س^{٢} متشابهة ، لأنها تتكون من المتغيرات نفسها ، ولكل متغير الدرجة نفسها .

أما الحدود : ٣ أ^{٤} ب ، ١٠ أ^{٢} ب^{٣} ، −١٧ أ ب^{٤} فهي حدود غير متشابهة لاختلاف درجة المتغيرات في كل حد منها عن الآخر .

والحدود : س ص^{٣} ، ١٢ أ س^{٣} ، ٥ س^{٣} جـ ، ١٣ أ^{٣} ب أيضاً غير متشابهة ، لاختلاف المتغيرات في كل حدمنها عن الآخر .

مما سبق نستنتج أن :

الحدود الجبرية المتشابهة هي الحدود المتفقة في المتغيرات ودرجتها .

مثال (٦) اذكر أياً من الحدود الجبرية الآتية متشابهة وأيها غير متشابهة :

أ) ٤ س ص^{٢} ، –٥س ص^{٢} ، ص^{٢}س

ب) ٢٥ أ ب^{٢} ، ٣ س ص أ ، $\frac{٢}{٣}$ –٩ س^{٢} ص

الحل : أ) ٤س ص^{٢} ، –٥ س ص^{٢} ، ص^{٢} س

حدود جبرية متشابهة لأنها متفقة في المتغيرات لها الدرجات نفسها .

ب) ٢٥ أ ب^{٢}، ٣س ص أ ، $\frac{٢}{٣}$ ٩ س^{٢} ص

حدود جبرية غير متشابهة لاختلاف المتغيرات في كل منها عن الآخر .

تمارين ومسائل

[١] اكتب مكونات الحدود الجبرية التالية :

٣ س ص ع ، –٥ س^{٣} ، أ ب ، $\frac{\text{٢س}}{\text{٢ص}}$ ، ٦

[٢] عبّر جبرياً عن كل مما يأتي :

أ) حاصل ضرب عدد ص في ١٥ ب) ثلاثة أمثال العدد س

[٣] عبّر جبرياً عن كل مما يأتي باستخدام رموز المتغيرات :

أ) ضعف طول محمود ب) خمسة أمثال راتب سلوى

جـ) ثلاثة أمثال عمر جميلة ء) ربع مساحة مربع .

[٤] إذا كان ثمن كيلو جرام شاي = س ريال، ثمن كيلو جرام سكر = ص ريال، فأوجد ما يلي :

أ) ثمن ربع كيلو جرام سكر ب) ثمن نصف كيلو جرام شاي

جـ) ثمن تسعة كيلوجرامات شاي ء) ثمن عشرون كيلو جراماً سكر

[٥] مستطيل طوله ل سم ، وعرضه ع سم ، فأوجد :

أولاً : مساحته ، ثانياً : محيطه .

[٦] مثلث طول قاعدته ق سم ، وارتفاعه ع سم ؛

أولاً : عبر جبرياً عن مساحة هذا المثلث ،

ثانياً : إذا كان ق = ٢,٥سم ، ع = ٤ سم ؛ فما مساحة المثلث ؟

[٧] أوجد حجم الاسطوانة التي نصف قطرها نق = ٣سم ، وارتفاعها ع = ٦سم علماً بأن حجم الاسطوانة = π نق^{٢} ع ، $\pi = \frac{٢٢}{٧}$

[٨] إذا كان س = $\frac{٢}{٣}$ ، ص = $-\frac{١}{٢}$ ، ع = $\frac{٥}{٦}$ ؛ فأوجد القيمة العددية لكل مما يأتي :

أ) س ص ع ب) ٤ س^{٢} ص ع جـ) س^{٢} ع^{٢} ء) س ع

[٩] أكمل الجدول التالي :

س	ص	٥ س ص	٢ س^{٢}	س^{٣}	س ص^{٢}	س^{٢} ص	ص^{٣}
٣	٢	٣٠					
١–	٢–		٢			٢–	
	٣–			٨			
١						١	
٣–	٢			٢٧–			

[١٠] ضع خطاً تحت الحدود الجبرية المتشابهة لكل مما يأتي :

أ) ع س ل ، ٥ ل س ع ، ٢٠ ع س ل ، س أ ب

ب) س ص^{٢} ، ٢ ص^{٢} س ، ٥ س^{٢} ص ، ١٠ س ص^{٢}

جـ) ع^{٢} ل م^{٢} ، ١٠ ل ع^{٢} م^{٢} ، ٣ ل م^{٢} ع

[١١] فيما يلي صل الحد الجبري من العمود الأيمن بالحد الجبري المشابه له من العمود الأيسر :

س ص	$س^٢$ ص
٣ ب جـ	٢ $أ^٢$ $جـ^٢$
٧ $س^٢$ ص	– س ص
$أ^٢$ $جـ^٢$	٥ س ص
– ع ل م	٤ ع ل م
	–٢ ب جـ

[١٢] اكتب : أ) : حدين جبريين متشابهين ،

ب) : حدين جبريين غير متشابهين

٣ : ٢ جمع الحدود الجبرية المتشابهة

تدريب احسب مايلي :

٥ + ٣ = ، (–٧) + (–٦) =

(–٧) + ٢ = ، ٨ + (–٥) =

إن القواعد المستخدمة في عملية جمع الأعداد الصحيحة يمكن استخدامها في عملية جمع الحدود الجبرية المتشابهة ،

تأمل ما يلي :

٤س + ٥س = ٩س ، (–٣أ) + (–٨أ) = –١١أ

(–٥ب) + ٣ ب = –٢ب ، (–٢$ص^٢$) + ٩ $ص^٢$ = ٧ $ص^٢$

مما سبق تلاحظ التالي :

عند جمع الحدود الجبرية المتشابهة يكون الناتج حداً جبرياً يشابه الحدود التي تم جمعها ، ومعامله يساوي مجموع معاملات هذه الحدود .

مثال (١) اجمع ما يأتي :

أ) ١٢س^{٢} ، ٩ س^{٢} ب) (–٨ س ص) ، (–٥ س ص)

جـ) ٧ ل^{٣} ، (–٣ ل^{٣}) ء) ٥ س ص ع ، (–١١ س ص ع)

الحل :

أ) ١٢ س^{٢} + ٩ س^{٢} = ٢١ س^{٢}

ب) (–٨س ص) + (–٥ س ص) = –١٣ س ص

جـ) ٧ ل^{٣} + (–٣ ل^{٣}) = ٤ ل^{٣}

ء) ٥ س ص ع + (–١١ س ص ع) = –٦ س ص ع

مثال (٢) أوجد مجموع ما يأتي :

١) ٣أب + ٢أب + أب ، ٢) (–٣أ^{٢}جـ) + (–٥أ^{٢}جـ) + (–٤أ^{٢}جـ) ،

٣) ٦ هـ^{٣} + ٥ هـ^{٣} + (–٩ هـ^{٣}) ، ٤) ٤ م^{٢} + (–١٥ م^{٢}) + ٦ م^{٢}

الحل :

١) ٣أب +٢أب + أب = ٦أب

٢) (–٣أ^{٢}جـ) + (–٥أ^{٢}جـ) + (–٤أ^{٢}جـ) = –١٢أ^{٢} جـ

٣) ٦ هـ^{٣} + ٥ هـ^{٣} + (–٩ هـ^{٣}) = ١١هـ^{٣} + (–٩هـ^{٣}) = ٢ هـ^{٣}

٤) ٤ م^{٢} + (–١٥ م^{٢}) + ٦ م^{٢} = ١٠م^{٢} + (–١٥ م^{٢}) = –٥ م^{٢}

مثال (٣)

إذا علمت أنَّ ثمن قميص س ريالاً، وكان ثمن البنطلون ثلاثة أمثال ثمن القميص فكم يكون ثمنهما؟

الحل :

∵ ثمن القميص = س ريالاً ، ∴ ثمن البنطلون = ٣ س ريالاً .

∴ ثمن القميص وثمن البنطلون معاً = س ريالاً + ٣ س ريالاً = ٤ س ريالاً .

مثال (٤)

إذا علمت أنَّ طول مستطيل س متراً، وعرضه ثلثي طوله فما محيطه؟

الحل :

طول المستطيل = س متراً ، $\therefore$ عرض المستطيل = $\frac{٢}{٣}$ س متراً.

محيط المستطيل = ٢ (الطول + العرض)

= ٢ (س + $\frac{٢}{٣}$ س)

= ٢ ($\frac{٣\text{س} + ٢\text{س}}{٣}$)

= ٢ ($\frac{٥}{٣}$ س) = ($\frac{١٠}{٣}$ س) متراً

تمارين ومسائل

[١] اجمع رأسياً :

أ) ٧ س
٣س
٥س

ب) (–٤$أ^{٢}$)
(–٥$أ^{٢}$)
(–$أ^{٢}$)

جـ) ١٥ ل م
(–٣٥ ل م)

ء) (–١٢ $س^{٢}$ع)
٢٥ $س^{٢}$ ع

[٢] صل العملية من العمود الأيمن بناتجها من العمود الأيسر ، في الجدول :

العملية	الناتج
٣س + ١١س	١٤ $س^{٢}$
(–٥س) + (–٩س)	٤ $س^{٣}$
٢٠ $س^{٢}$ + (–٦ $س^{٢}$)	–١٤ س
(–٩س) + ٥س	١٤س
– $س^{٢}$ + (–٣$س^{٢}$)	–٤ س
	–٤ $س^{٢}$

[٣] أوجد ناتج ما يأتي :

١) ٣ أ^{٢}ب^{٢} + ٢٥ أ^{٢}ب^{٢} + ٦ أ^{٢}ب^{٢}

٢) (−٢ س ص ع) + (−٣س ص ع) + (−٧ س ص ع)

٣) ١٢ أ^{٣}ب + (−١٧ أ^{٣}ب)

٤) ٢٣ س ص^{٢} + (−١٥ س ص^{٢})

[٤] أوجد ناتج ما يأتي :

أ) ٨ س^{٢} + (−٩س^{٢}) + (−٢ س^{٢})

ب) $\frac{٢}{٣}$ أ + (− $\frac{١}{٣}$ أ) + (− $\frac{١}{٣}$ أ)

جـ) $\frac{٢}{٣}$ هـ + (− $\frac{١}{٣}$ هـ) + $\frac{٣}{٤}$ هـ + (− $\frac{١}{٤}$ هـ)

ء) ب^{٢} + ٢,٣ب^{٢} + (−١٢ب^{٢}) + (٤,٥ ب^{٢})

[٥] إذا كان س = ٢ ، ص = ٣ ؛ فأوجد القيمة العددية للمجموع فيما يأتي :

أ) ٣ س ص + ٥ س ص

ب) $\frac{٢}{٣}$ س ص^{٢} + $\frac{١}{٦}$ س ص^{٢}

[٦] إذا كان عمر هشام س سنة ، وعمر والده خمسة أمثال عمره، فما عمر كل منهما؟

[٧] مثلث أطوال أضلاعه ٣س ، ٥س ، ٧ س من السنتيمترات، أوجد محيطه.

[٨] مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ٥ ل سم ، أوجد محيطه.

[٩] مستطيل عرضه س من الأمتار وطوله ضعف عرضه ، فكم يكون محيطه؟

[١٠] ثلاثة حدود جبرية إذا كان الحد الأول ٥ س ،الحد الثاني ضعف الحد الأول والحد الثالث ثلاثة أمثال الحد الثاني ، فأوجد مجموع الحدود الثلاثة ؟

٣ : ٣ طرح الحدود الجبرية المتشابهة

تأمل الأمثلة التالية :

٧ –(–٥) = ٧ + ٥ = ١٢

٣ – ١٥ = ٣ + (–١٥) = –١٢

(–٩) – (–٧) = (–٩) + ٧ = –٢

(–٣) –٥ = (–٣) + (–٥) = –٨

إن القواعد المستخدمة في عملية طرح الأعداد الصحيحة ، يمكن استخدامها في عملية طرح الحدود الجبرية المتشابهة ، وادرس الأمثلة التالية ، ماذا تلاحظ ؟ :

٧س – ٣س = ٧ س + (–٣س) = ٤ س

٣ص –(–٦ص) = ٣ص + ٦ ص = ٩ص

(–٧ع^{٢}) – (–٥ع^{٢}) = (–٧ع^{٢}) + ٥ع^{٢} = –٢ع^{٢}

(–٣س^{٣}) – ٥س^{٣} = (–٣س^{٣}) + (–٥س^{٣}) = –٨ س^{٣}

ومن مثل هذه الحالات نستنتج أن :

عملية طرح الحدود الجبرية المتشابهة هي عملية جمع للمطروح منه مع النظير الجمعي للمطروح ، ويكون الناتج حد أجبرياً مشابهاً للحدود التي تم طرحها ، ومعامله يساوي المجموع الجبري لمعاملات هذه الحدود .

مثال (١)

أ) اطرح ٢٥س^{٢} من ٢٩ س^{٢}

ب) اطرح (–٣ص^{٣}) من (–٩ص^{٣})

جـ) من (–١٣هـ و) اطرح (–١٥ هـ و)

الحل :

أ) ٢٩ س^{٢} – ٢٥س^{٢} = ٢٩ س^{٢} + (–٢٥س^{٢}) = ٤ س^{٢}

ب) (–٩ص^{٣}) – (–٣ص^{٣}) = (–٩ ص^{٣}) + ٣ ص^{٣} = –٦ ص^{٣}

جـ) (–١٣ هـ و) – (–١٥ هـ و) = (–١٣ هـ و) + ١٥ هـ و = ٢ هـ و

مثال (٢)

أوجد ناتج ما يأتي : أ) ٣ س^{٢}ص^{٢} – ٧س^{٢}ص^{٢} + ٥ س^{٢}ص^{٢}

ب) $\frac{٢}{٣}$ س^{٢} – ٥ س^{٢}

الحل : أ) ٣ س^{٢}ص^{٢} – ٧س^{٢}ص^{٢} + ٥ س^{٢}ص^{٢}

= ٣س^{٢}ص^{٢} + (–٧س^{٢}ص^{٢}) + ٥ س^{٢} ص^{٢}

= ٨ س^{٢}ص^{٢} + (–٧س^{٢}ص^{٢}) = س^{٢}ص^{٢}

ب) $\frac{٢}{٣}$ س^{٢} – ٥ س^{٢} = $\frac{٢}{٣}$ س^{٢} + (–٥س^{٢})

= $\frac{٢س^{٢} + (–١٥س^{٢})}{٣}$

= $\frac{–١٣س^{٢}}{٣}$

مثال (٣) حدان جبريان مجموعهما ٢٥س، فإذا كان الحد الأول ١٢س فما هو الحد الثاني؟

الحل : مجموع الحدين = الحد الأول + الحد الثاني

٢٥ س = ١٢س + $\boxed{...}$ نبحث عن حد إذا أضفنا إلى الحد الأول (١٢س) أصبح المجموع (٢٥س) .

إذن هذا الحد الثاني هو الفرق بين المجموع والحد الأول .

∴ الحد الثاني = ٢٥ س – ١٢ س = ١٣ س

تمارين ومسائل

[١] أوجد ناتج ما يأتي :

أ) ١٢س^٢ – ٩س^٢ ب) ٥ س ص – ١٢ س ص

جـ) (–٣ س^٣) – ٥س^٣ ء) ٢٨ ك م – ٢٥ ك م

[٢] أكمل الجدول التالي :

المطروح منه	المطروح	الناتج
٧س	٣ س	......
١٥س^٣	....	–٣ س^٣
–٥س^{٢}ص^٢	٢ س^{٢}ص^٢	....
....	٧ س^٤	٢ س^٤
١٢أب	....	٨أب
–٥أجـ^٣	–٢أجـ^٣	....
....	–٦ س^{٣}ع^٢	–١١ س^{٣}ع^٢

[٣] أ) من ٢٥ س^٢ اطرح ١٢ س^٢ ب) من ($\frac{-٢}{٣}$ هـ) اطرح $\frac{٣}{٥}$ هـ

[٤] اطرح أ) (–٧س^{٢}ص) من ١٥ س^{٢}ص

ب) (–١٢أ جـ) من (–٢٥أجـ)

[٥] أوجد ناتج ما يأتي :

أ) ٨ س^٢ –٣س^٢ – ١١س^٢ ب) ٧ ل م – ٥ ل م – ل م

جـ) ٣,٥أب + ٢,٢٥أب – ٣أب   ء) $\frac{٣}{٥}$ س^٢ – $\frac{٢}{٥}$س^٢ – س^٢

[٦] حدان جبريان مجموعهما ١٥ س^٢ فإذا كان أحدهما ٧ س^٢ ؛ فما هو الحد الآخر؟

[٧] لدى تاجر ١٢٠ ص من العسل . باع منها ٧٥ ص ؛ فكم تبقى معه؟

[٨] ثلاثة حدود جبرية مجموعها ٥٣ ك م. إذا كان الحد الأول ١٢ ك م، والحد الثاني ٢٥ ك م ؛ فما هو الحد الثالث؟

[٩] حديقة منزل مستطيلة الشكل محيطها ٣٦ س متراً ، وعرضها ٨ س متراً ؛ فما طولها؟

٣ : ٤ ضرب الحدود الجبرية

تأمل ما يلي :

$٢ \times ٣ = ٦$ ، $٧ \times ٧ = ٧^{٢}$ ،

$س \times ص = س ص$ ، $س \times س = س^{٢}$ ؛

$٢ أ \times ٣ أ = (٢ \times ٣) \times (أ \times أ) = ٦ أ^{٢}$

$(-٨ س ص) \times (-٢ س) = (-٨ \times (-٢)) \times (س \times س) \times ص$

$= ١٦ س^{٢} ص$

وعليه نستنتج أنه :

عند ضرب حد جبري في آخر : نضرب المعاملات في بعضها ، ثم نضرب المتغيرات في بعضها ؛ فنحصل على حد جبري جديد .

وعند الضرب نستخدم القواعد نفسها التي توصلنا إِليها في عملية ضرب الأعداد الصحيحة .

مثال (١) أوجد ناتج الآتي :

١) $ل \times ٣ ل$

٢) $٤ أ^{٢} ب \times (- أ ب^{٢})$

٣) $-٤ س^{٢} ص \times (-٣ س ص)$

الحل: ١) ل × ٣ ل = (١ × ٣) × (ل × ل) = ٣ ل^{٢}

٢) ٤ ا^{٢} ب × (– ا ب^{٢}) = (٤ × (–١)) × (ا^{٢} × ا) × (ب × ب^{٢})

= –٤ ا^{٣} ب^{٣}

٣) –٤ س^{٢} ص × (–٣ س ص)

= (–٤ × (–٣)) × (س^{٢} × س) × (ص × ص)

= ١٢ س^{٣} ص^{٢}

مثال (٢)

اضرب الحدود التالية :

١) ٢ س ص ، ٧ س ص

٢) –٣ ا ب ، –٢ ا^{٢} ب

٣) $\frac{١}{٢}$ ن^{٢} ، ٦ م^{٢} ن

الحل:

١) ٢ س ص × ٧ س ص

= (٢ × ٧) × (س × س) × (ص × ص)

= ١٤ س^{٢} ص^{٢} ،

٢) –٣ ا ب × (–٢ ا^{٢} ب)

= (–٣ × (–٢)) × (ا × ا^{٢}) × (ب × ب)

= ٦ ا^{٣} ب^{٢}

٣) $\frac{١}{٢}$ ن^{٢} × ٦ م^{٢} ن = ($\frac{\cancel{١}}{\cancel{٢}_{١}}$ × $\cancel{٦}_{٣}$) × م^{٢} × (ن^{٢} × ن)

= ٣ م^{٢} ن^{٣}

مثال (٣) أوجد كلاً مما يأتي في أبسط صورة :

أ) −٣ أ^{٢} ب^{٢} × ٤ أ ، ب) $\frac{٢}{٩}$ س^{٢} ص × (−٣٦ س ص)

الحل: أ) −٣ أ^{٢} ب^{٢} × ٤ أ = (−٣ × ٤) × (أ^{٢} × أ) × ب^{٢}

= −١٢ أ^{٣} ب^{٢}

ب) $\frac{٢}{٩}$ س^{٢} ص × (−٣٦ س ص)

= ($\frac{٢}{\cancel{٩}_{١}}$ × (−$\cancel{٣٦}^{-٤}$)) × (س^{٢} × س) × (ص × ص)

= −٨س^{٣} ص^{٢}

مثال (٤) مستطيل طوله ٤ س سم وعرضه نصف طوله ؛ أوجد مساحته .

الحل: طول المستطيل = ٤ س سم

∵ عرض المستطيل = نصف الطول

∴ عرض المستطيل = ٤س سم ÷ ٢ = ٢ س سم

مساحة المستطل = الطول × العرض

= ٤ س سم × ٢س سم

= (٤×٢) × (س ×س) سم^{٢}

= ٨ س^{٢} سم^{٢}

تمارين ومسائل

[١] أوجد حاصل الضرب الآتي :

أ) ٣ أ × ٥ أ ب

ب) ٤ س × (−س ص)

جـ) −ل م × (−٣ ل م^{٢})

[٢] اضرب الحدود التالية:

أ) $-\frac{٢}{٣}$ ع ، ٩ س ع   ب) −٢ س ص ، ٣ س ، − س ص

[٣] صل العمود الأيمن بما يساوية من العمود الأيسر:

$-\frac{١}{٦}$ س × (−٣٦ س ص)	٥ أ ب جـ
أ^{٢} ب^{٢} × (−٥ جـ)	٦ س^{٢} ص
١٥ أ جـ × $\frac{١}{٣}$ ب	٥ أ^{٢} ب جـ
	−٥ أ^{٢} ب^{٢} جـ

[٤] اكتب كلاً مما يأتي في أبسط صورة:

أ) أ ب^{٢} × أ^{٢} ب جـ   ب) −ع^{٢} ل × ٤ م^{٢}

جـ) $\frac{٣}{٥}$ هـ و × $\frac{٥}{٣}$ هـ

[٥] أوجد ناتج الآتي:

أ) ٢٥ أ^{٢} × $\frac{٤}{٥}$ أ ب   ب) س^{٢} × س^{٣} × ٢ س ص

جـ) ٣ ل^{٢} م × ($-\frac{١}{٢}$ ل)

[٦] أكمل الجدول التالي:

×	أ ب^{٢}	−٣ أ^{٢} ب جـ	$\frac{٣}{٢}$ ب^{٢} جـ	−أ ب س^{٢}
٢ أ ب	٢ أ^{٢} ب^{٣}			

[٧] إذا كانت س = ٢ ، ص = ٣ ، ع = −١؛ فأوجد القيمة العددية لحاصل ضرب الحدود التالية:

٢ س ص ، $\frac{١}{٤}$ ص ع^{٢} ، ٤ س ع^{٢}

[٨] قطعة أرض مربعة الشكل طول ضلعها س متراً فما مساحتها ؟

[٩] أوجد حاصل ضرب الحدود التالية : ٣ س ع ، $-\frac{١}{٩}$ ص ، س ص

[١٠] إذا كانت ل = −١ ، م = ٣ ؛ فأوجد القيمة العددية لحاصل الضرب

(س × ص) ؛ علماً بأن : س = ٤ $ل^{٢}$ م ، ص = −٢ ل

[١١] إذا كانت س = ٢ ، ص = ٣ ؛ فأوجد القيمة العددية للآتي :

أ) $س^{٤}$ ب) س × $ص^{س}$ جـ) $س^{ص+١}$ × $س^{ص}$

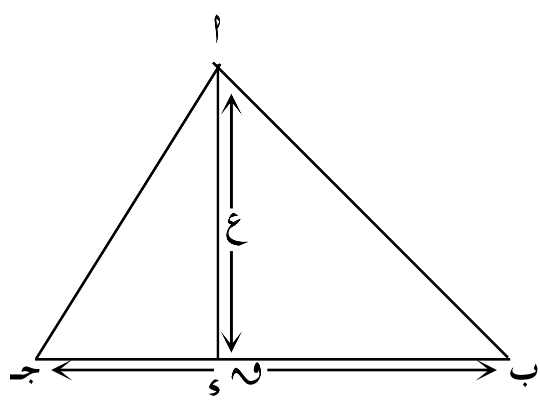
[١٢] في الشكل (٣ − ١) :

أ ب جـ مثلث طول قاعدته ق سم وارتفاعه ع سم

أ) عبِّر عن مساحة المثلث أ ب جـ رمزياً .

ب) أوجد مساحة المثلث أ ب جـ إذا كانت : ق = ٨ سم ، ع = ٤ سم .

علماً أن مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × القاعدة × الارتفاع .



شكل (٣ − ١)

٣ : ٥ قسمة الحدود الجبرية

نعرف أن :

١٤ ÷ ٢ = ٧ لأن ٧ × ٢ = ١٤

وبالمثل : ٤ س ص ÷ ٢ س = ٢ ص ، لأن ٢ ص × ٢ س = ٤ س ص

غالباً ما نتأكد من صحة ناتج القسمة بضرب خارج القسمة في المقسوم عليه فنحصل على المقسوم .

« لأن عملية القسمة عكسية بالنسبة لعملية الضرب »

ويمكن كتابة القسمة في صورة بسط ومقام ، حتى يمكن إجراء عملية الاختصار على النحو التالي :

$$٢٥ \text{ س}^٢ \text{ص} \div ٥ \text{ س ص} = \frac{٢٥ \text{ س}^٢ \text{ص}}{٥ \text{ س ص}}$$

$$= \frac{\cancel{٢٥}^{\,٥}}{\cancel{٥}_{\,١}} \times \frac{\text{س} \times \cancel{\text{س}}}{\cancel{\text{س}}} \times \frac{\cancel{\text{ص}}}{\cancel{\text{ص}}} = ٥\text{س}$$

التحقق : ٥ س × ٥ س ص = ٢٥ س^٢ ص

مما سبق نجد أنه :

عند قسمة حد جبري على آخر نقسم معامل المقسوم على معامل المقسوم عليه ، ونقسم متغيرات المقسوم على متغيرات المقسوم عليه فنحصل على حد جبري جديد .

وعند القسمة نستخدم القواعد نفسها ، التي توصلنا إليها في عملية قسمة الأعداد الصحيحة .

مثال (١) أوجد ناتج الآتي :

أ) $\text{٨ س}^{٢} \div \text{٤ س}$ ب) $\text{–١٦ أ}^{٢}\text{ب} \div \text{٤ أ ب}$

الحل:

أ) $\text{٨ س}^{٢} \div \text{٤ س} = \frac{\text{٨ س}^{٢}}{\text{٤ س}} = \frac{\cancel{\text{٨}}^{\text{٢}}}{\cancel{\text{٤}}_{\text{١}}} \times \frac{\text{س} \times \cancel{\text{س}}}{\cancel{\text{س}}} = \text{٢ س}$

ب) $\text{–١٦ أ}^{٢}\text{ب} \div \text{٤ أ ب} = \frac{\text{–١٦ أ}^{٢}\text{ب}}{\text{٤ أ ب}} = \frac{-\cancel{\text{١٦}}^{\text{٤}}}{\cancel{\text{٤}}_{\text{١}}} \times \frac{\text{أ} \times \cancel{\text{أ}}}{\cancel{\text{أ}}} \times \frac{\text{ب}}{\text{ب}} = \text{–٤ أ}$

مثال (٢) بسّط الكسور التالية :

أ) $\frac{\text{–٤ س}^{٣}\text{ص}}{\text{–٢ س ص}}$ ب) $\frac{\text{–١٢ ع}^{٢}\text{ل}^{٢}\text{م}^{٢}}{\text{٦ ع ل م}}$

الحل:

أ) $\frac{\text{–٤ س}^{٣}\text{ص}}{\text{–٢ س ص}} = \frac{\cancel{\text{–٤}}^{\text{٢}}}{\cancel{\text{–٢}}_{\text{١}}} \times \frac{\text{س}^{٢} \times \cancel{\text{س}}}{\cancel{\text{س}}} \times \frac{\cancel{\text{ص}}}{\cancel{\text{ص}}} = \text{٢ س}^{٢}$

ب) $\frac{\text{–١٢ ع}^{٢}\text{ل}^{٢}\text{م}^{٢}}{\text{٦ ع ل م}} = \frac{-\cancel{\text{١٢}}^{\text{٢}}}{\cancel{\text{٦}}_{\text{١}}} \times \frac{\text{ع} \times \cancel{\text{ع}}}{\cancel{\text{ع}}} \times \frac{\cancel{\text{ل}}}{\cancel{\text{ل}}} \times \frac{\text{م} \times \cancel{\text{م}}}{\cancel{\text{م}}} = \text{– ٢ ع م}$

مثال (٣) اقسم $\text{٤٢ س}^{٢}\text{ص ع}^{٢}$ على (–٦ س ع) ؛ ثم أوجد القيمة العددية لناتج القسمة إذا كانت س=٢ ، ص= ١ ، ع = –٢

الحل:

$\text{٤٢ س}^{٢}\text{ص ع}^{٢} \div (\text{–٦ س ع})$

$= \frac{\text{٤٢ س}^{٢}\text{ص ع}^{٢}}{\text{–٦ س ع}} = \frac{\text{٤٢}}{\text{–٦}} \times \frac{\text{س} \times \cancel{\text{س}}}{\cancel{\text{س}}} \times \text{ص} \times \frac{\text{ع} \times \cancel{\text{ع}}}{\cancel{\text{ع}}} = \text{– ٧ س ص ع}$

القيمة العددية = $(\text{– ٧}) \times \text{٢} \times \text{١} \times (\text{–٢}) = \text{٢٨}$

مثال (٤)

سجادة مستطيلة الشكل ، مساحتها ٥٠ س ص سم^{٢} . فإذا كان طولها ١٠س سم؛ فما عرضها؟

الحل: عرض السجادة = مساحتها ÷ طولها

$= ٥٠$ س ص سم^{٢} ÷ ١٠ س سم $= \frac{٥٠ \text{ س ص سم}^{٢}}{١٠ \text{ س سم}}$

$= \frac{٥٠}{١٠} \times \frac{\text{س}}{\text{س}} \times$ ص $= ٥$ ص سم .

تمارين ومسائل

[١] أوجد ناتج الآتي :

أ) ١٤ س ص ÷ ٧ س　　　ب) ـ٢٤ ب^{٢} ء^{٢} ÷ ١٢ ب ء^{٢}

[٢] بسّط الكسور التالية :

أ) $\frac{٣ \text{ س}^{٢} \text{ص}}{٣ \text{ س}}$　　　ب) $\frac{-٤\text{ل}^{٢}\text{م}^{٢}\text{ن}^{٢}}{-\text{ل}^{٢}\text{ن}^{٢}}$　　　جـ) $\frac{-٢١\text{أ}^{٢}\text{ب}^{٣}\text{جـ}^{٢}}{٧\text{أ}^{٢}\text{ب}^{٢}\text{جـ}}$

[٣] أكمل الفراغ التالي :

أ) س ع^{٢} × .... = ٧ س^{٢} ص^{٢} ع^{٢}

ب) .... × (ـ ٥ ل م) = ١٥ ل^{٢} م ن

جـ) ء^{٢} هـ^{٢} × .... = ء^{٢} هـ^{٢} و

[٤] اختصر كلاً من الكسور التالية :

أ) $\frac{٨\text{أ ب}}{٤\text{أ ب}}$　　　ب) $\frac{٦٤\text{أ}^{٢}\text{س}^{٣}}{-١٢\text{أ س}}$　　　جـ) $\frac{(-٢)^{٣}\text{هـ}^{٢}\text{و}}{٢\text{ هـ}}$

[٥] أكمل الجدول التالي :

المقسوم عليه / المقسوم	١٢ ءب	ـ ٣ء	٦ ء٢ ب٢	ـ٤ ب٢
٢٤ ء٢ ب٣	٢ ء ب٢			

[٦] إذا كان حاصل ضرب حدين جبريين هو ١٠٠ س٣ ع، وكان أحدهما يساوي ـ٢٥ س ع ، فما الحد الآخر؟

[٧] اقسم ـ٢٨ ل٤ م٣ على ـ٧ ل٢ م٢ ، ثم تحقق من الناتج؟

[٨] إذا كانت ء = ٢ ، ب = ١ ، جـ = ـ٣ ؛ فأوجد القيمة العددية لخارج قسمة ل على م ، علماً بأن : ل = ٢ ء٢ ب٣ جـ٢ ، م = ـ ء ب٢ جـ

[٩] مستطيل مساحته ٢٧س٢ سم٢ وعرضه ٣ س سم ، فما طوله؟ ثم أوجد القيمة العددية لمساحته إذا كانت س = ٢

[١٠] مثلث مساحته ١٦ س٢ سم٢ وطول قاعدته ٨ سم، أوجد ارتفاعه ؛ علماً أن: [مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ القاعدة × الارتفاع] .

[١١] حاصل ضرب حدين جبريين (ـ١٤٤ س٣ ل م٢)، وكان أحدهما (ـ٢٤س ل م) ، فما هو الحد الآخر ؟

٣ : ٦ المقدار الجبري

تأمل الحدين الجبريين: ٣ س ص ، ٥ ا ب ، تجد أنهما غير متشابهين وإذا جمعنا هذين الحدين نحصل على: ٣ س ص + ٥ ا ب ؛ وإذا طرحنا هذين الحدين فإننا نحصل على: ٣ س ص − ٥ ا ب . وكل من هاتين النتيجتين تسمى مقداراً جبرياً، كذلك التعابير الجبرية الآتية:

أ) $-$س^{٤} + س^{٢} + س

ب) $\frac{٣}{٤}$ ع ل^{٢}

جـ) ٢ ص^{٢} + ٢س^{٢}ص − ٢ ص^{٢}س + ٤

تسمى مقادير جبرية ، أي أن:

المقدار الجبري: هو ما تكون من حد أو أكثر

ويسمى المقدار المكون من حد واحد مقداراً ذا حد واحد (أومقدارأحادي) ، والمقدار المكون من حدين يسمى مقداراً ذا حدين (أو مقدار ثنائي) ، والمقدار المكون من ثلاثة حدود يسمى مقداراً ذا ثلاثة حدود (أو مقدار ثلاثي) . . . وهكذا .

مثال (١)

اذكر عدد الحدود في المقادير الجبرية التالية :

ا) ٣ س − ١٠ ص　　　ب) − ٤س^{٣}ص ع

جـ) س^{٢} − ٣ س + ٥　　　ى) ٦ س^{٢} + ٥ س ص + ص^{٢} − ١٠

الحل :

أ) ٣ س $-$ ١٠ ص مقدار مكوّن من حدين .

ب) -٤ س^{٣} ص ع مقدار مكوّن من حد واحد .

جـ) س^{٢} -٣ س $+$ ٥ مقدار مكوّن من ثلاثة حدود .

ء) ٦س^{٢} $+$ ٥ س ص $+$ ص^{٢} $-$ ١٠ مقدار مكون من أربعة حدود .

مثال (٢)

رتّب المقدار التالي تنازلياً وتصاعدياً :

س^{٥} $-$ ٢ س $+$ ٥ س^{٣} $-$ ١٠ $+$ ٤ س^{٢} $+$ ٢ س^{٤}

الحل :

أولاً : الترتيب التنازلي حسب قوى س :

س^{٥} $+$ ٢ س^{٤} $+$ ٥ س^{٣} $+$ ٤ س^{٢} $-$ ٢ س $-$ ١٠

ثانياً : الترتيب التصاعدي حسب قوى س :

$-$ ١٠ -٢س $+$ ٤ س^{٢} $+$ ٥ س^{٣} $+$ ٢ س^{٤} $+$ س^{٥}

تمارين ومسائل

[١] اذكر عدد الحدود في المقادير الآتية ، وسمّها وفقاً لعدد حدودها :

أ) ٣ جـ^{٢}

ب) ٣ جـ^{٢} $-$ ٢ جـ$+١$

جـ) أ^{٢}ب^{٢} $-$ حـ^{٢} ء^{٢}

ء) س^{٢}ص^{٢}ع^{٢} $-$ ٣ س ص ع $+$ ٢ ص^{٢}س^{٢} -٥

[٢] عيّن المقادير الثلاثية من المقادير الجبرية التالية :

أ) ١٤ س + ١٠ ب) ٧ $س^{٢}$ + ٥ س ص − $ص^{٢}$

جـ) $\frac{٢}{٣}$ س + $\frac{٣}{٢}$ ص ء) ٥ $س^{٤}$ع − $\frac{١}{٢}$ $س^{٢}$$ص^{٢}$ + ٥ س $ع^{٤}$

[٣] رتب كلاً من المقادير الآتية :

مرةً تنازلياً حسب قوى ص ، ومرة أخرى تصاعدياً حسب قوى ص

أ) $ص^{٤}$ع + ٣ ص ع −٧ + ٤ $ص^{٢}$ع + ٩ $ص^{٣}$$ع^{٢}$

ب) هـ$ص^{٣}$ + ٥ هـ ص + ٣ هـ$ص^{٢}$ +٢ هـ$ص^{٥}$ − ٤ هـ

[٤] ثمن قلم س ريال وثمن كراسة ص ريال ؛ فما ثمن ٣ أقلام و٤ كراسات؟

[٥] حديقة على شكل مستطيل طوله س متراً وعرضه ص متراً ، اكتب المقدار الجبري الذي يمثل طول السياج الذي يمكن أن يحيط بالحديقة .

[٦] اكتب المقادير الجبرية لكل مما يأتي باستخدام المتغير س أو ص

أ) العدد ٤ مضافاً إلى عدد ب) ناتج طرح عدد من ١٠

جـ) ضعف عدد مضافاً إليه ٥ ء) $\frac{١}{٢}$ حجم مكعب

[٧] إذا كان س = ٦ ، ص = ٤ ؛ فأوجد القيمة العددية لكل من المقادير الجبرية الآتية :

أ) س + ص ب) $\frac{١}{٣}$س + ٢ جـ) $س^{٢}$ + $ص^{٢}$

[٨] مثلث أطوال أضلاعه ل ، ع ، م ؛ عبر عن محيط هذا المثلث . ثم أوجد محيط المثلث عددياً ،

إذا كان ل = $\frac{٢}{٣}$ سم ، ع = $\frac{١}{٢}$ سم ، م = $\frac{٥}{٦}$ سم .

٣ : ٧ جمع المقادير الجبرية

جمع المقادير الجبرية لا تختلف عن جمع الحدود الجبرية، حيث تجمع الحدود المتشابهة في المقادير كل على حدة؛ فمثلاً التعبير الجبري التالي :

(٣ $س^٢$ + ٥س) + (٢ $س^٢$ + ٣س) هو مجموع مقدارين الأول ٣$س^٢$ + ٥س والثاني ٢$س^٢$ + ٣س ولوضعه في أبسط صورة ، نلاحظ أن فيه حدوداً متشابهة يمكن جمعها أفقياً فيكون :

٣$س^٢$ + ٥س + ٢ $س^٢$ + ٣ س

= (٣ $س^٢$ + ٢ $س^٢$) + (٥س + ٣ س)

= ٥ $س^٢$ + ٨ س

وبذلك يكون مجموع مقدارين هو مقدار جبري آخر . كذلك لجمع المقدارين:

١٥ س + ٦ $س^٢$–٩ ، ٣ –٢س + $س^٢$ يفضل ترتيبهما إما تنازلياً أو تصاعدياً ثم نجمع الحدود المتشابهة إن وجدت فنجد أن :

١٥ س + ٦$س^٢$ – ٩ = ٦ $س^٢$ + ١٥ س – ٩ (الترتيب التنازلي)

و ٣ – ٢ س+ $س^٢$ = $س^٢$ – ٢ س + ٣ (الترتيب التنازلي)

ولجمعهما أفقياً :

(١٥ س+ ٦ $س^٢$ –٩) + (٣ –٢س + $س^٢$)

= (٦$س^٢$ + ١٥ س–٩) + ($س^٢$ –٢ س +٣)

= (٦$س^٢$ + $س^٢$) + (١٥س –٢س) + (–٩ + ٣)

= ٧ $س^٢$ + ١٣ س –٦

ويمكننا إيجاد ناتج جمع المقدارين السابقين بطريقة رأسية بعد ترتيبهما تنازلياً أو تصاعدياً ووضع الحدود المتشابهة تحت بعضها على النحو التالي :

$$\begin{array}{r} ٦ س^٢ + ١٥ س \quad -٩ \\ س^٢ \quad - ٢ س \quad + ٣ \\ \hline \end{array}$$

المجموع $٧ س^٢ + ١٣ س \quad - ٦$

مثال (١) اجمع المقدارين :

٢ س – ٣ص ، ٢ س – ٤ص

الحل :

(٢ س – ٣ص) + (٢ س –٤ص) = (٢س + ٢ س) + (–٣ص – ٤ ص)

= ٤ س –٧ص

مثال (٢) أوجد ناتج جمع المقادير :

٤ أ – ٣ب – ٥ ، ٥ ب – ٣ أ + ٤ ، ٢ أ – ب – ٣

الحل :

أولاً : بالطريقة الأفقية :

(٤أ – ٣ب –٥) + (٥ب –٣ أ + ٤) + (٢أ – ب –٣)

= (٤أ – ٣ أ + ٢أ) + (–٣ب +٥ب –ب) + (–٥ +٤ –٣)

= ٣ أ + ب –٤

ثانياً : بالطريقة الرأسية : يترك للطالب إجراء الجمع بالطريقة الرأسية .

مثال (٣) اجمع ما يلي :

٤ ص – ٣ ص^{٣} + ٥ ، ٢ ص^{٣} – ١١ ص^{٢} + ٢ ص ،

٦ ص^{٣} + ٣ ص^{٢} – ٨

الحل : نجمع رأسياً مع الترتيب تنازلياً حسب قوى ص :

–٣ ص^{٣} + ٤ ص + ٥

٢ ص^{٣} – ١١ ص^{٢} + ٢ ص

٦ ص^{٣} + ٣ ص^{٢} – ٨

المجموع ٥ ص^{٣} – ٨ ص^{٢} + ٦ ص – ٣

لاحظ أننا تركنا فراغ للحد غير الموجود .

و يترك للطالب إيجاد المجموع بالطريقة الأفقية .

مثال (٤)

اكتب ما يلي بصورة مبسطة ثم أو جد القيمة العددية للناتج ،

إذا كان : أ = ١ ، ب = ٢ ، جـ = – ١

٢أ + ب + ٦جـ + جـ + ٥ ب + ٣ أ – ٣ ب – ٤ جـ + ٢ جـ

الحل :

٢أ + ب + ٦جـ + جـ + ٥ ب + ٣ أ – ٣ ب – ٤ جـ + ٢ جـ

= (٢ أ + ٣ أ) + (ب + ٥ب – ٣ب) + (٦ جـ + جـ – ٤جـ + ٢جـ)

= ٥ أ + ٣ ب + ٥ جـ .

القيمة العددية للناتج = ٥ × ١ + ٣ × ٢ + ٥ × (–١) = ٥ + ٦ – ٥ = ٦

تمارين ومسائل

[١] اجمع ما يأتي:

أ) $٥ س + ٧ ص$ ، $٣ س - ص$

ب) $أ + ب + جـ$ ، $٣ أ - ب + ٢ جـ$

جـ) $٢ ع + ن + ٥ م$ ، $-١٠ ع + ٥ م - ٣ ن$

ء) $٢ أ + ب$ ، $-٧ أ + جـ$

[٢] اكتب ما يأتي في أبسط صورة:

أ) $٣ أ + ب + (٥ أ - ٢ ب)$ ب) $ب - ٧ أ + (٣ ب + ٨ أ)$

جـ) $(- أ + ب) + (ب - أ)$ ء) $(أ - ب) + (ب - جـ) + (جـ - أ)$

[٣] اجمع $(٣ س^{٢} + ٤ ص^{٢} + ٥ س ص)$ مع $(٧ ص^{٢} - ٨ س ص + ٥ س^{٢})$

[٤] رتب كلاً من المقادير التالية ترتيباً تصاعدياً، ثم أوجد ناتج الجمع بطريقتين:

$س^{٢} + ٥$ ، $س - س^{٢} + ٣$ ، $٢ س - ٤ + ٣ س^{٢}$

[٥] أوجد ناتج جمع ما يلي:

أ) $٣ س^{٣} - ٥ س^{٢} - س - ٣$ ، $٧ س^{٢} - ٥ س^{٣} + ٣ س$ ، $٦ + ٣ س^{٣} - ٢ س$

ب) $٣ س ص - ٢ س^{٢} + ٧ ص^{٢}$ و $٤ س^{٢} - ص^{٢}$ ، $٣ س ص - ٥ س^{٢}$

[٦] أ) اجمع: $\frac{٣}{٤} س^{٢} + \frac{٢}{٣} س - ٧$ مع $\frac{٥}{٤} س^{٢} - ٦ س + ٤$

ب) اجمع: $\frac{١}{٢} أ^{٢} + \frac{٥}{٣} أ - \frac{١}{٤}$ مع $\frac{١}{٢} أ^{٢} - \frac{١}{٣} أ + \frac{١}{٢}$

[٧] اجمع: $س^{٢} + س ص ع$ ، $٢ س^{٢} + ٣ س ص ع$

ثم أوجد القيمته العددية للمجموع عندما: $س = ١$ ، $ص = ٢$ ، $ع = ٣$

[٨] اجمع: $٤ ل^{٣} + ٢ ل^{٢} - ٥ ل + ٧$ مع $٣ - ٤ ل - ٣ ل^{٢} + ل^{٣}$ ؛

ثم أوجد القيمة العددية للمجموع عندما: $ل = ٢$

[٩] أوجد ك + ل ، إذا كان :

ك = س^{٢} ع + ٤ س ع + ع^{٢} ؛

ل = ٤ س ع + ٣ س^{٢} ع + ٥ ع^{٢}

[١٠] إذا كان س = ٥ أ + ب + ٢ جـ ، ص = −٣ أ + ٥ ب − جـ

أوجد س + ص ؛ ثم أوجد قيمته العددية عندما :

أ = ١ ، ب = ٢ ، جـ = −١

[١١] اكتب ما يأتي في أبسط صورة :

أ) ٥ س − ٥٠ ص + ٦ س − ٦ ص − ٦ س + ١٢ ص

ب) ء − هـ + ٢ هـ − ٣ ء + ١٠ ء − ٥ هـ + ٣ ء

[١٢] عددان صحيحان أحدهما (٥ س − ٢) ، والآخر يزيد عن الأول بمقدار (٢ س + ١) . أوجد العدد الآخر، ثم أوجد مجموع هذين العددين .

٣ : ٨ طرح المقادير الجبرية

إن القاعدة في طرح المقادير الجبرية لا تختلف عن طرح الحدود الجبرية، وذلك بأن تطرح الحدود المتشابهة في المقادير كل على حدة ؛ فمثلاً لو أردنا طرح المقدار ٣ س^{٢} + ٤ س من المقدار ٧ س + ١٥ س^{٢} ؛ نكتب :

(٧ س + ١٥ س^{٢}) − (٣ س^{٢} + ٤ س)

= (١٥ س^{٢} + ٧ س) − (٣ س^{٢} + ٤ س)

= (١٥ س^{٢} − ٣ س^{٢}) + (٧ س − ٤ س)

= ١٢ س^{٢} + ٣ س

ويمكننا إجراء عملية الطرح السابقة بالطريقة الرأسية بعد ترتيب المقدارين تنازلياً (أو تصاعدياً) كما يلي :

	١٥ س^{٢} + ٧ س	$\Leftarrow$	١٥س^{٢} + ٧ س
–	(٣ س^{٢} + ٤ س)		–٣ س^{٢} – ٤ س
	الفرق	=	١٢ س^{٢} + ٣ س

ويمكننا إيجاد الفرق بطريقة مباشرة، حيث نكتب المقدار الأول (المطروح منه) مرتباً تصاعدياً أو تنازلياً حسب أحد متغيراته، ثم نكتب المقدار الثاني (المطروح) مرتباً بالطريقة نفسها لترتيب المقدار الأول ، وبحيث يأتي كل حد من حدود المقدار الثاني (المطروح) تحت الحد المشابه له في المقدار الأول (المطروح منه)، ثم نغير إشارة كل حد من حدود المقدار الثاني (المطروح)، ثم نجمع المقدارين جبرياً .

مثال (١)

أوجدالفرق : (١٣ ص^{٢} – ص – ١٢) – (–٥ص + ص^{٢} –٧)

الحل :

	١٣ ص^{٢}	–	ص	–	١٢	
	$\mp$ ص^{٢}	$\pm$	٥ص	$\pm$	٧	
الفرق =	١٢ ص^{٢}	+	٤ ص	–	٥	

مثال (٢)

اطرح ٣س + ٥ص – ٣ع من ٧س + ٣ص –ع

الحل :

بالطريقة الأفقية :

(٧س + ٣ص – ع) – (٣س + ٥ص –٣ع)

= (٧س –٣س) + (٣ص –٥ص) + (–ع + ٣ ع)

= ٤ س – ٢ ص + ٢ ع

بالطريقة الرأسية :

٧س + ٣ ص – ع

∓ ٣س ∓ ٥ ص ± ٣ ع

الفرق = ٤ س – ٢ ص + ٢ ع

مثال (٣)

اطرح ٧س^{٤} –٣س^{٢} + ٥ س – ٥ من ١٠س^{٤} – س^{٢} + ٣ س + ١٠

الحل :

الطريقة الأفقية :

(١٠س^{٤} – س^{٢} + ٣ س + ١٠) – (٧س^{٤} –٣س^{٢} + ٥س –٥)

= (١٠س^{٤} –٧س^{٤})+(–س^{٢} + ٣ س^{٢}) + (٣س –٥س)+(١٠+٥)

= ٣ س^{٤} + ٢ س^{٢} –٢س + ١٥

الطريقة الرأسية : يترك للطالب إيجاد الفرق بالطريقة الرأسية .

مثال (٤)

اطرح مجموع المقدارين:

٣س^{٢} –٢س ص +٣ص^{٢} ، –٥س^{٢} + ٤ س ص –٢ص^{٢} ؛

من ٣ س^{٢} + ٧س ص – ٢ص^{٢}

الحـل : أولاً : نوجد مجموع المقدارين :

$$٣ س^٢ \quad - \quad ٢ \; س \; ص \quad + \quad ٣ \; ص^٢$$

$$-٥ س^٢ \quad + \quad ٤ \; س \; ص \quad - \quad ٢ \; ص^٢$$

المجموع = $-٢ س^٢ \quad + \quad ٢ \; س \; ص \quad + \quad ص^٢$

ثانياً : نوجد الفرق بطرح هذا المجموع من $٣س^٢ + ٧س \; ص - ٢ \; ص^٢$ ؛

أي أن :

$$٣ \; س^٢ + ٧س \; ص - ٢ \; ص^٢$$

$$\pm ٢ \; س^٢ \mp ٢ \; س \; ص \mp ص^٢$$

الفرق= $٥ \; س^٢ + ٥ \; س \; ص - ٣ \; ص^٢$

تمارين ومسائل

[١] أ) اطرح ٩أ – ٣ ب من ١٥أ – ب

ب) اطرح ٢س–٣ص + ٣ ع من ٧س – ٣ ص + ١١ع

[٢] أ) من – ب –أ اطرح –أ – ب

ب) من ٤ $أ^٢ب^٢$ – ١٨أ ب + ١٦ اطرح $أ^٢ب^٢$ – ٤ أ ب + ٢٥

جـ) من ٥ $س^٢$ + ٤ س ص – ٩ $ص^٢$ اطرح $س^٢$ –٣ س ص – ١٨ $ص^٢$

[٣] أوجد ناتج الطرح لكل مما يأتي :

أ) (٢$س^٢$ –٥س –٧) – (٣ س + ٢ $س^٢$ –٨ –$س^٣$)

ب) (ص –٨) – ($ص^٢$ – ٩)

جـ) (–١٣$ل^٥$ + ٤ $ل^٤$ –$ل^٣$)– (–٢ $ل^٥$ –$ل^٤$ + ٢ $ل^٣$)

[٤] من $\frac{٣}{٥}$ ا + $\frac{٣}{٤}$ جـ اطرح $\frac{٣}{٤}$ جـ − $\frac{٣}{١٠}$ ا

[٥] اطرح $\frac{٣}{٧}$ ا^{٢} + $\frac{١}{٢}$ ا − $\frac{١}{٢}$ من $\frac{٥}{٧}$ ا^{٢} − $\frac{٣}{٤}$ ا + $\frac{١}{٢}$

[٦] بسّط ما يأتي :

ا) (ا − ب) − (ب − جـ) − (جـ − ا)

ب) (−٧ ص −٧س) − (٦ ص −٦ س)

جـ) (٢ ا + ٣ جـ − ٤ ء) − (٣ جـ − ٥ ا + ٢ ء)

[٧] أوجد ناتج طرح ما يأتي بالطريقة الرأسية :

(٥س ص^{٢} −٧س^{٣} + ٢س^{٢}ص − ص^{٣}) − (−٥ص^{٣} − ٩س^{٣} + س^{٢}ص)

[٨] ما زيادة ا^{٢} − ٦ا − ١ عن ٣ا^{٢} + ٢ا −٣ ؟

[٩] إذا كان : س= ٣ا^{٢} + ٢ا ب − ب^{٢} ، ص = ا^{٢} − ٣ا ب + ٢ ب^{٢}

فأوجد : ا) س − ص ب) س + ص

[١٠] اطرح من ٣ س^{٢} + ٧ س ص − ٢ ص^{٢} مجموع المقدارين:

٣س^{٢} − ٢ س ص + ٣ ص^{٢} ، −٥ س^{٢} + ٤ س ص − ٢ ص^{٢}

[١١] من مجموع ٢ا^{٢} + ٣ ا −١ ، −٥ ا^{٢} −٣ ، اطرح مجموع

٣ا^{٢} + ٣ا +٤ ، ٤ا + ٥

[١٢] اطرح ٢ ب^{٢} جـ^{٢} − ٣ ب جـ −١ من ٤ب^{٢} جـ^{٢} + ٢ ب جـ −٧

ثم أوجد القيمة العددية لناتج الطرح إذا كان ب=١ ، جـ=٢

[١٣] ضع المقدار الآتي لأبسط صورة:

٦أ – ٤ ب – ٥أ – ٣ ب + ٤أ + ٢ ب

ثم احسب قيمته العددية عندما: أ = –١ ، ب = ٢

٣ : ٩ تمارين ومسائل عامة

[١] أوجد ناتج الآتي:

أ) (–٦ و^{٢} هـ^{٣}) + (–٤ و^{٢} هـ^{٣}) + (–١١ و^{٢} هـ^{٣})

ب) ٥ س^{٣} + (– $\frac{١}{٢}$ س^{٣}) + ٨ س^{٣} + (– $\frac{١}{٤}$ س^{٣})

جـ) $\frac{٣}{٤}$ ء هـ × ٤ هـ × – $\frac{١}{٢}$ ء^{٢} هـ

ء) (أ – ب) – (ب – أ) + (٢أ – ب)

[٢] أوجد ناتج الآتي:

أ) (٣أ^{٢}ب) (٢أب^{٥})

ب) ٣٦ س^{٢} ص^{٢} ÷ ٦ س ص

جـ) ٣ س^{٢} ص × –٢ س ص ع

ء) ١٥ م^{٢} ÷ ٣ م^{٢}

[٣] أ) اطرح ٣ س + ٤ ص + ٢ ع من –٥س – ص + ع

ب) اطرح أ + ب + جـ من ٢أ + ٣ ب – ٤ جـ

جـ) اطرح ١٦ + ٣ س^{٢} – ٢س من س – ٢س^{٢} + ٥

[٤] أ) اجمع ٣ س^{٢} – س^{٣} + ٢ س – ١ ، ٥س^{٣} – ٧س + ٤ س^{٢} + ٦

ب) اجمع أ^{٢} – ٢ + ٣أ ، ٤أ – ٢أ^{٢} + ٥

جـ) اجمع ٣ س ص – س^{٢} + ٥ص^{٢} ، ٢ س^{٢} – ٣ص^{٢} ، ٥ س ص – ص^{٢} + ٢ س^{٢}

[٥] اطرح ٢ ف $-$ ٣ ف^{٢} من ٦ $+$ ف^{٢} $-$ ف .

[٦] من ٤ ب $+$ ٢ جـ $-$ ٣أ اطرح ٦أ $-$ ٣ ب $+$ جـ .

[٧] اجمع ٥س^{٢} $+$ ٣ س ص $+$ ٢ ص^{٢} ، ٤ س^{٢} $-$ س ص ، س^{٢} $-$ س ص $-$ ص^{٢}،
ثم أوجد القيمة العددية لناتج الجمع عندما س $=$ ١ ، ص $=$ ٢ .

[٨] إذا كان حاصل ضرب حدين جبريين هو $-$٢٧ س^{٣}ص^{٣} ، وكان أحدهما يساوي ٩ س^{٢} ؛ فما هو الحد الآخر؟

[٩] عمر سامي الآن ثلاثة أمثال عمر محمد ، ما مجموع عمر سامي وعمر محمد بعد خمس سنوات؟

[١٠] مستطيل محيطه ٢٥س سم ، وعرضه ٥ س سم ؛ فما طوله؟

[١١] إذا كانت مساحة حديقة مستطيلة الشكل ٧٢ س^{٢}م^{٢} ، وكان عرضها ٨ س م ؛ فما طولها؟

[١٢] عددان صحيحان أحدهما ٧س $-$ ٣ ، والآخر ينقص عن الأول بمقدار ٤س $+$ ٢ ؛ أوجد مجموع هذين العددين.

٣ : ١٠ اختبار الوحدة

[١] أ) اكتب الحدود المشابهة للحد ٣ أ٢ ب مما يأتي :

٣س٢ ب ، ٣ س أ ، –٥ أ٢ ب ، ٤ س٢ ، ١٠ أ٢ ب ، ب أ٢

ب) اذكر مكونات كل حد في المقدار الآتي :

٢ س٢ ص٢ + ١٠ س ص – ٩

[٢] أوجد ناتج الآتي :

أ) ٧س٢ ص – ١١ س٢ ص

ب) ٣ أ٢ ب٢ + ٤ أ٢ ب٢ + (– أ٢ ب٢)

جـ) ٥٤ ع٢ ÷ (–٩ ع)

ء) أ س ص × ٢٤ أ س

[٣] اقسم ٣٦ س٢ ص٢ ع على ٩ س٢ ص ؛ ثم تحقق من صحة الحل .

[٤] اجمع ٣أ – ب + ٤ جـ ، مع أ – ٥ب – جـ

[٥] اطرح ٢ س٣ –٣س٢ + ٣ ، من س + ٤ س٣ + ٥ س٢

ثم أوجد القيمة العددية لناتج الطرح عندما س =١

[٦] مستطيل عرضه ٢س سم وطوله ٣ ص سم ، أوجد :

أ) محيطه ب) مساحته

الوحدة الرابعة

المعادلات والمتراجحات

٤ : ١ الجملة المفتوحة

تأمل الجمل التالية ، ماذا تلاحظ ؟ :

(١) ٣ عدد طبيعي فردي .

(٢) ٤ عدد طبيعي فردي .

(٣) س عدد طبيعي فردي .

ستجد أن الجملة الأولى صائبة، والجملة الثانية خطأ؛ أما الجملة الثالثة فلن تستطيع الحكم عليها هي صائبة أم خطأ؟ ولكن إذا عوضت بدل المتغير (س) في الجملة الثالثة عدداً مثل: ٥ ، ٧ ، ٩ ، .. تكون الجملة صائبة ؛ أما إذا وضعت بدل المتغير (س) عدداً مثل: ٤ ، ٦ ، ٨ ، . . . تكون الجملة خطأ .

ولذا تسمى الجملة التي تحتوي على متغير جملة مفتوحة ، لأنه لا يمكن الحكم على صوابها أو خطأها إلاّ بعد التعويض عن المتغير .

الجملة المفتوحة هي جملة تحتوي على متغير أو أكثر .

تدريب

صنف كلاً من الجمل التالية إلى جمل صائبة أو خطأ أو جمل مفتوحة:

(١) القدس عاصمة فلسطين .

(٢) ٨ $\ni$ {٢ ، ٣ ، ٦}

(٣) ع أحد العشرة المبشرين بالجنة.

(٤) ص عدد صحيح زوجي .

مجموعة التعويض ومجموعة الحل :

تأمل الجملة : « س عدد طبيعي أصغر من ٥ » .

ستجد أنه يمكنك أن تأخذ أي عدد من مجموعة الأعداد الطبيعية لتضعه بدلاً عن المتغير س . وهذه المجموعة التي يتم اختيار الأعداد أو العناصر منها تسمى **مجموعة التعويض** ؛ إذن مجموعة التعويض هنا هي مجموعة الأعداد الطبيعية .

مجموعة عناصر التعويض التي تجعل الجملة المفتوحة صائبة تسمى **مجموعة الحل** ، وهي مجموعة جزئية من مجموعة التعويض . وكل عنصر ينتمي إلى مجموعة الحل يسمى **حلاً للجملة المفتوحة** ؛ إذن مجموعة الحل للجملة المفتوحة السابقة هي مجموعة الأعداد {. ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} وهي مجموعة جزئية من مجموعة التعويض(ط) .

مثال (١)

أوجد مجموعة الحل لكلٍّ من الجمل المفتوحة التالية ؛ حيث مجموعة التعويض هي { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧، ٨ ، ٩ } :

(أ) س عدد فردي . (ب) س عدد أولي . (جـ) س عدد زوجي .

الحل :

أ) مجموعة حل الجملة « س عدد فردي » هي { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ }

ب) مجموعة حل الجملة « س عدد أولي » هي { ٢ ، ٣، ٥ ، ٧}

جـ) مجموعة حل الجملة « س عدد زوجي » هي { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ }

مثال (٢)

إذا كانت مجموعة التعويض هي مجموعة الأعداد الصحيحة (صـ) ؛

فما مجموعة الحل للجملة المفتوحة ؟ : ٣ س = ٢٧

الحـل :

نقوم بالتعويض عن المتغير في الجملة المفتوحة ٣س = ٢٧ ؛ بأي عدد صحيح مثّل الأعداد (–٦) ، ٨ ، ٩، . . . ونبحث متى تصبح الجملة صائبة، وذلك على النحو التالي :

عندما س = (–٦) ، ٣ س = ٣ × (–٦) = –١٨ ؛ ∴ الجملة خطأ .

عندما س = ٨ ، ٣ س = ٣ × ٨ = ٢٤ ؛ ∴ الجملة خطأ .

عندما س = ٩ ، ٣ س = ٣ × ٩ = ٢٧ ؛ ∴ الجملة صائبة .

أي أن العدد الذي جعل الجملة صائبة هو العدد ٩

∴ مجموعة الحل هي { ٩ }

تمارين ومسائل

[١] أوجد مجموعة حل الجمل المفتوحة الآتية ، علماً بأن مجموعة التعويض هي { ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٨ }:

أ) س – ٣ = ٢ ب) ل + ٤ = ٧

جـ) س – ٤ = ٤ ء) ٣ س –٤ = ٥

[٢] أوجد مجموعة حل الجمل المفتوحة الآتية ثم تحقق من صحة الحل حيث أن مجموعة التعويض هي { ٠ ، ٤ ، ٧ ، ٩ } :

أ) ص + ٥ = ٥ ب) ٥س + ٢س = ٢٨

جـ) ٤س – ١٤ = ٢س + ٤ د) ٢ص – ١٠ = ٤

[٣] إذا كانت مجموعة التعويض هي صـ+ ؛ فأوجد مجموعة حل الجمل المفتوحة الآتية :

أ) س – ٤ = ٩ ب) ص – ٥ = ٥ جـ) س – ٦ = ٣

٤ : ٢ المعادلة

تأمل الجمل المفتوحة التالية :

(١) س + ٥ = ١٥ (٢) ص – ٦ = ٤

(٣) ٢ل = ٦ (٤) ع ÷ ٣ = ٤

ستجد أن كل جملة من الجمل السابقة احتوت على متغير وإشارة المساواة « = » تسمى كل جملة من هذه الجمل « معادلة » .

أي أن :

المعادلة هي جملة مفتوحة تحتوي على إشارة المساواة « = »

تتكون المعادلة من طرفين (مثل كفتي الميزان) : أحدهما يسمى الطرف الأيمن ، ويسمى الآخر الطرف الأيسر .

مجموعة حل المعادلة :

مجموعة الحل لأي معادلة هي مجموعة العناصر التي تنتمى كل منها إلى مجموعة التعويض ، وإذا عوضنا بها عن المتغيرات في المعادلة نحصل على جملة صائبة . وكل عنصر في مجموعة الحل يسمى **حلاً للمعادلة** ، وحل المعادلة يعني إيجاد قيم المتغيرات التي تجعل المعادلة جملة صائبة .

مثـال

اكتب مجموعة التعويض ومجموعة الحل للمعادلة التالية :

٢س – ٦ = ٠ حيث أن س $\in$ ص$^+$

الحل:

مجموعة التعويض هي مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة وهي :

ص$^+$ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، . . . }

وللحصول على مجموعة الحل نجرّب التعويض عن المتغير في المعادلة

٢س – ٦ = ٠ ، بأي عدد صحيح موجب يجعل المعادلة جملة صائبة.

فإذا عوضنا مثلاً بالأعداد ١ ، ٢ ، ٣ سنجد الآتي :

عندما س = ١ فإن ٢س – ٦ = ٢ × ١ – ٦ = ٢ – ٦ = – ٤

عندما س = ٢ فإن ٢س – ٦ = ٢ × ٢ – ٦ = ٤ – ٦ = – ٢

عندما س = ٣ فإن ٢س – ٦ = ٢ × ٣ – ٦ = ٦ – ٦ = ٠

$\therefore$ العدد (٣) هو حل المعادلة وينتمى إلى مجموعة التعويض ص$^+$

$\therefore$ مجموعة الحل هي {٣} .

قواعد التحويلات المكافئة :

لتكن لديك المعادلة س + ٧ = ١٦ ، فحلها س = ٩ . فإذا قمنا بإجراء بعض العمليات مثل : (الجمع ، الطرح ، الضرب ، القسمة) على طرفي هذه المعادلة بالعدد نفسه فستحصل على معادلات أخرى لها الحل نفسه للمعادلة السابقة.

نسمي المعادلات التي لها الحل نفسه في مجموعة التعويض نفسها **المعادلات المتكافئة** ، والعمليات والقواعد التي تحول معادلة ما إلى معادلة مكافئة لها تسمى **التحويلات المكافئة** .

ويمكن توضيح ذلك من خلال إجراء العمليات الأربع على طرفي المعادلة السابقة مثلاً بالعدد (٤) ؛ على النحو التالي :

١) الجمع : س + ٧ = ١٦ (بإضافة العدد ٤ إلى طرفي المعادلة)

س + ٧ + ٤ = ١٦ + ٤

س + ١١ = ٢٠ ، وهي معادلة مكافئة وحلها س = ٩

٢) الطرح : س + ٧ – ٤ = ١٦ – ٤ (بطرح العدد ٤ من طرفي المعادلة)

س + ٣ = ١٢ ، وهي معادلة مكافئة، وحلها س = ٩

٣) الضرب : ٤ (س + ٧) = ٤ X ١٦ (بضرب طرفي المعادلة في العدد ٤)

٤س + ٢٨ = ٦٤ ، وهي معادلة مكافئة ، وحلها س = ٩

٤) القسمة : $\frac{\text{س} + ٧}{٤} = \frac{١٦}{٤}$ (بقسمة طرفي المعادلة على العدد ٤)

$\frac{\text{س}}{٤} + \frac{٧}{٤} = \frac{١٦}{٤}$

$\frac{\text{س}}{٤} + \frac{٧}{٤} = ٤$ وهي معادلة مكافئة وحلها س = ٩

يمكن أن نحصل على معادلة مكافئة لمعادلة معطاة إذا :

١ – أضفنا العدد نفسه إلى كل من طرفي المعادلة .

٢ – طرحنا العدد نفسه من كل من طرفي المعادلة .

٣ – ضربنا طرفي المعادلة في العدد نفسه ، على ألاّ يساوي هذا العدد صفراً .

٤ – قسمنا طرفي المعادلة على العدد نفسه ، على ألا يساوي هذا العدد صفراً .

إننا نستخدم قواعد التحويلات المكافئة عندما نقوم بحل المعادلات لنحصل على معادلات مكافئة للمعادلات المطلوب حلها، تكون في صور أبسط حتى يسهل حلها .

مثـال

إذا كانت مجموعة التعويض هي { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ،

فأوجد مجموعة الحل للمعادلات التالية :

أ) س – ٢ = ٣ ب) س + ٥ = ٩ جـ) ٢س = ٦

الحل : أ) س –٢ = ٣

س – ٢ + ٢ = ٣ + ٢ (بإضافة العدد ٢ إلى الطرفين) .

س = ٥ وهي معادلة مكافئة

∴ مجموعة الحل = {٥}

ب) س + ٥ = ٩

س + ٥ – ٥ = ٩ – ٥ (بطرح العدد ٥ من الطرفين) .

س = ٤ وهي معادلة مكافئة .

∴ مجموعة الحل = {٤}

جـ) ٢ س = ٦

$\frac{٢}{٢}$ س = $\frac{٦}{٢}$ (بقسمة الطرفين على ٢)

س = ٣ وهي معادلة مكافئة

ومجموعة حلها = {٣}

تمارين ومسائل

[١] صنف كلاً من من الجمل التالية إلى جمل صائبة أو جمل خطأ أو جمل مفتوحة :

أ) ٢ عدد أولي وزوجي　　　　ب) ٢ س = ١٤

جـ) ع عدد سالب　　　　د) { ٣ } ∋ {٣ , ٥}

هـ) س أحد الخلفاء الراشدين　　　　و) أ + ٤ = ٨

[٢] اكتب مجموعة الحل لكل من المعادلات التالية إذا كانت مجموعة التعويض هي { ٣، ٦ ، ٩ ، ١٢ ، ١٥ ، ١٨ } :

أ) س + ٧ = ٢٥　　　　ب) ل – ٩ = – ٦

جـ) ٢ م = ٣٠　　　　ء) ٤ + ص = ١٠

[٣] إذا كانت مجموعة التعويض هي مجموعة الأعداد الصحيحة صـ فأوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات التالية :

أ) ٢ س – ٣ = ٧　　　　ب) ٣ ص – ٤ = – ١

جـ) ٣ س – ٤ = – ٣٤　　　　ء) ٢ ص + ٣ = ٢٥

هـ) ٢ ع – ١ = – ٢٩　　　　و) ١٥ = ٢س + ٧

٤ : ٣ معادلة الدرجة الأولى في متغير واحد

تأمل المعادلات الآتية :

٢س = ٨ ، ع + ٤ = ٧ ، ٤ ص – ٥ = ١٢

ستجد أن كلاًّ منها تتكون من متغير واحد، وقوته من الدرجة الأولى .

نسمى مثل هذه المعادلات **معادلات من الدرجة الأولى في متغير واحد**

وصورتها العامة هي :

ا س + ب = جـ حيث ا ، ب ، جـ $\in$ صـ ، ا $\neq$ ٠

نعتمد في حل هذه المعادلات على مادرسته من قواعد التحويلات المكافئة وما تحتاجه المعادلة من عمليات حسابية ولتجميع وتبسيط الحدود المتشابهة الموجودة في المعادلة .

ونقتصر في هذه الوحدة على مجموعة الأعداد الصحيحة كمجموعة تعويض ومن المفيد حل المعادلة والتحقق من صحة الحل وذلك عن طريق التعويض بالحل في المعادلة المعطاة ، كما في الأمثلة الآتية :

مثال (١)

حل المعادلة : ٣ ص = ١٢ ، وتحقق من صحة الحل .

الحـل :

٣ ص = ١٢

$\frac{\text{٣ص}}{\text{٣}} = \frac{\text{١٢}}{\text{٣}}$ (بقسمة الطرفين على العدد ٣) .

ص = ٤

التحقق من صحة الحل :

الطرف الأيمن = ٣ X ص = ٣ X ٤ = ١٢

الطرف الأيسر = ١٢

∵ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

∴ الحل صحيح .

مثال (٢)

حل المعادلة : س + ٣ = ٥ ، وتحقق من صحة الحل .

الحل:

س + ٣ = ٥

س + ٣ – ٣ = ٥ – ٣ (بطرح العدد ٣ من الطرفين) .

س = ٢

التحقق من صحة الحل :

الطرف الأيمن = س + ٣ = ٢ + ٣

الطرف الأيسر = ٥

∵ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر = ٥

مثال (٣) حل المعادلة ٢٥ = س – ١٥ ، وتحقق من صحة الحل .

الحل :

٢٥ = س – ١٥

٢٥ + ١٥ = س – ١٥ + ١٥ (بإضافة العدد ١٥ للطرفين) .

٤٠ = س

التحقق من صحة الحل : الطرف الأيمن = ٢٥

الطرف الأيسر = س – ١٥ = ٤٠ – ١٥ = ٢٥

∵ الطرف الأيسر = الطرف الأيمن

∴ الحل صحيح .

مثال (٤)

حل المعادلة ٥س + ٢س = –٤

الحل :

٥س + ٢س = – ٤ (بجمع الحدود المتشابهة)

٧س = –٤

$\frac{\text{٧س}}{\text{٧}} = \frac{\text{–٤}}{\text{٧}}$ (بقسمة الطرفين على العدد ٧) .

س = $\frac{\text{–٤}}{\text{٧}}$

∵ $\frac{\text{–٤}}{\text{٧}}$ ∌ ص (الحل لاينتمي إِلى مجموعة التعويض)

∴ لا يوجد حل للمعادلة في مجموعة الاعداد الصحيحة .

مثال (٥) حل المعادلة : ٤ – ٢ س = ١٠

الحل :

٤ – ٢س = ١٠

٤ – ٤ – ٢س = ١٠ – ٤ (بطرح العدد ٤ من الطرفين) .

– ٢س = ٦

$\frac{-٢س}{-٢} = \frac{٦}{-٢}$ (بقسمة الطرفين على العدد – ٢)

س = – ٣

ملحوظة : تحقق من صحة الحل بنفسك .

مثال (٦)

حل المعادلة : ٦ س + ٤س + ٦٠ = ٩٦٢ – س

الحل :

٦س + ٤س + ٦٠ = ٩٦٢ – س

١٠س + ٦٠ = ٩٦٢ – س (بجمع الحدود المتشابهة) .

١٠س + ٦٠ –٦٠ = ٩٦٢ – ٦٠ – س (بطرح العدد ٦٠ من الطرفين) .

١٠س = ٩٠٢ – س

١٠س + س = ٩٠٢ – س + س (بإِضافة س للطرفين) .

١١س = ٩٠٢

$\frac{١١س}{١١} = \frac{٩٠٢}{١١}$ (بقسمة الطرفين على العدد ١١) .

س = ٨٢

أجرِ عملية التحقق بنفسك .

تمارين ومسائل

حل المعادلات التالية في صـ ، وتحقق من صحة الحل :

[١] س − ٤ = ٩

[٢] ل + ٩ = ٧

[٣] ٧س = ٠

[٤] − ٧ص = ٦٣

[٥] ٢م = −٩٤

[٦] − س + ٤ = −١

[٧] ٩ = ٩س

[٨] ٦س + ٤س − س = ١٨

[٩] ٤س +٥ = ١٧

[١٠] ٨ل − ١ = ٧

[١١] ٥س − ٣ = −١٨

[١٢] ١٥س − ١٧ = ١٣

[١٣] ٣ + ٣ص = ١٨

[١٤] ٤س = س + ١٢

[١٥] ٣س +٦ = −٢س − ٤

[١٦] ٦س − ٨ = ٢س

[١٧] ٤س − ٦ = س − ١٥

[١٨] س + ٨ = ١٩

[١٩] ٤ س + ٦ س = ٥٠

[٢٠] س − ٢٨ = ٤٢

[٢١] س − ٢ س = ٧

[٢٢] إذا كانت مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع النوني تساوي ١٨٠° (ن − ٢) فأوجد عدد أضلاع مضلع مجموع قياسات زواياه الداخلية تساوي ١٠٨٠°

[٢٣] حديقة أطفال مستطيلة الشكل محيطها (ح) يساوي ١٦٠ متراً. فإذا كان عرضها (ع) يساوي ٣٥ متراً ، فما طولها (ل) ؟

٤ : ٤ مسائل تطبيقية

لكل علم من العلوم تطبيقاته التي تربطه بالواقع المعاش. وعلم الرياضيات من أهم العلوم التي تعالج الكثير من المسائل التي تواجهنا في حياتنا اليومية، ومن ذلك استخدام المعادلات في حل الكثير من المسائل التي تواجهنا في واقع الحياة .

فتكتب العلاقة في المسألة على صورة معادلة رياضية، ثم نقوم بحلها .

ويجب علينا دائماً التحقق من الحل حتى نتأكد بأنه لم يكن هناك خطأ في تكوين المعادلة نفسها، أو في خطوات الحل .

ولإعطاء صورة واضحة عن بعض التطبيقات ، علينا أولاً أن نتعلم كيفية إنشاء المعادلات .

مثال (١)

كوّن المعادلات المعبرة عمَّا يأتي :

أ) ثمن ثلاثة أقلام يساوي ٦٠ ريالاً

ب) عددان الفرق بينهما ٥ ، ومجموعهما ١٣

جـ) ثلاثة اعداد متتالية مجموعهما ١٥

الحـل :

أ) نفرض أن : ثمن القلم = س

ثمن ثلاثة أقلام = ٣س

العلاقة : ثمن ثلاثة أقلام = ٦٠ ريال ،

∴ المعادلة هي : ٣ س = ٦٠

ب) نفرض أن : العدد الأول = ص

لاحظ في هذا المثال وجود أكثر من علاقة

العلاقة الأولى : أن الفرق بين العددين = ٥

∴ العدد الثاني = العدد الأول – ٥

العدد الثاني = ص – ٥

العلاقة الثانية : أن مجموع العددين = ١٣

∴ العدد الأول + العدد الثاني = ١٣

ص + (ص – ٥) = ١٣

وتكون المعادلة : ٢ ص – ٥ = ١٣

جـ) نفرض أن العدد الأول = هـ

العلاقة الأولى ؛ أن الأعداد الثلاثة متتالية .

∴ العدد الثاني سيزيد عن الأول بمقدار ١

∴ العدد الثاني = هـ + ١

والعدد الثالث سيزيد عن العدد الثاني بمقدار ١

∴ العدد الثالث = (هـ + ١) + ١

= هـ + ٢

العلاقة الثانية : أن مجموعهم = ١٥

∴ هـ + (هـ + ١) + (هـ + ٢) = ١٥

∴ المعادلة هي : ٣هـ + ٣ = ١٥

مثال (٢) ما العدد الذي إِذا أَضيف اليه ٦ كان الناتج –٩ ؟

الحل : نفرض أن العدد = س

∴ س + ٦ = –٩

س + ٦ – ٦ = –٩ –٦ (بطرح ٦ من طرفي المعادلة)

س = – ١٥

∴ العدد = – ١٥

التحقق :

الطرف الأيمن للمعادلة (١) = س + ٦ = –١٥ + ٦ = – ٩ = الطرف الأيسر .

مثال (٣)

عددان صحيحان يزيد الأول عن الثاني بمقدار ٤ ، ومجموعها يساوي ٨

فما العددان ؟

الحل : نفرض أن العدد الأول = ص

∴ العدد الثاني : ص – ٤

∴ ص + (ص – ٤) = ٨

٢ ص – ٤ = ٨

٢ ص – ٤ + ٤ = ٨ + ٤ (بإِضافة ٤ إِلى طرفي المعادلة) .

٢ ص = ١٢

$\frac{\text{٢ص}}{\text{٢}} = \frac{\text{١٢}}{\text{٢}}$ (بقسمة طرفي المعادلة على ٢) .

ص = ٦

∴ العدد الأول : ص = ٦

العد د الثاني : ص – ٤ = ٦ – ٤ = ٢

التحقق :

الفرق بين العددين = العدد الأول – العدد الثاني = ٦ – ٢ = ٤

مجموع العددين = العدد الأول + العددد الثاني = ٦ + ٢ = ٨

مثال (٤)

مثلث متساوي الساقين طول قاعدته يزيد عن طول أحد ساقية بمقدار ٢ سم؛ فإذا كان محيطه يساوي ٢٠سم ، فأوجد أطوال أضلاعه.

الحل :

نفرض أن طول الضلع الأول = ع

∴ طول الضلع الثاني = ع

∴ طول القاعـــــــدة = ٢ + ع

محيط المثلث = ٢٠

محيط المثلث = مجموع أطوال أضلاعه = ٢٠

ع + ع + (٢ + ع) = ٢٠

٣ ع + ٢ = ٢٠

٣ ع = ١٨ (بقسمة طرفي المعادلة على ٣)

ع = $\frac{١٨}{٣}$ ∴ ع = ٦ سم

∴ طول الضلع الأول : ع = ٦ سم ،

طول الضلع الثاني : ع = ٦ سم

طول القاعدة : ٢ +ع = ٢ + ٦ = ٨سم

التحقق :

طول الضلع = ٦ سم

طول القاعدة = ٢ + ٦ = ٨ سم

محيط المثلث = (٦ + ٦ + ٨) سم

= ٢٠ سم

تمارين ومسائل

[١] كوّن المعادلات المعبرة عمّا يأتي :

أ) خمسة أمثال عدد يساوي ١٥

ب) الفرق بين ثمن كراسة وقلم ٦٥ ريال، وثمنهما معاً ١٠٠ ريال .

جـ) يزيد عُمر أيمن عن عُمر اخته سلوى بخمس سنوات ، ومجموع عمريهما ٣١سنة .

[٢] أوجد العدد الصحيح الذي ضعفه يساوي ٦

[٣] ما العدد الصحيح الذي إذا طرح منه خمسه كان الناتج – ٣؟

[٤] أوجد طول ضلع مثلث متساوي الأضلاع ؛ إذا علم أن محيطه يساوي ١٢سم .

[٥] ماهو العدد الصحيح، الذي إذا أضفته إلى ثلاثة أمثاله كان الناتج (−٤)؟

[٦] عددان صحيحان الفرق بينهما ٧ ، ومجموعهما ٣، فأوجد العددين.

[٧] مستطيل ثلاثة أمثال عرضه يزيد عن طوله بمقدار ٤سم ، فإذا كان محيطه يساوي ٤٠سم ، فأوجد طوله وعرضه .

[٨] عددان الفرق بين الأول والثاني ٥ ، والفرق بين أربعة أمثال الأول وثلاثة أمثال الثاني يساوي ٦ ، فأوجد العددين.

[٩] ثلاثة أعداد زوجية متتالية مجموعها ١٨ ، فماهي هذه الأعداد ؟

[١٠] اشترك ثلاثة أشخاص في رأس مال شركة ، فشارك الأول بضعف ما شارك به الثاني وشارك الثالث بأقل مما شارك به الأول بمبلغ ١٠٠٠٠ ريال فإذا كان رأس مال الشركة ٢٠٠٠٠٠ ريال ، فأوجد ماشارك به كل منهم على حدة.

٤ : ٥ المتراجحات

إذا سألك أحدهم أن تعطيه عدداً صحيحاً أكبر من الصفر فإن إجابتك ستكون طبعاً أي عدد صحيح موجب ، وإذا رمزنا لهذا العدد بالمتغير ﺃ فيمكن أن نكتب ذلك على النحو ﺃ > . ، ويكون ﺃ ∈ { ١ ، ٢ ، ٣ ، . . . }

ويكون في هذه الحالة ﺃ ∈ صـ$^+$

تسمى « ﺃ > ٠ » متراجحة ، تسمى {١ ، ٢ ، ٣ ، . . . } مجموعة الحل ، حيث صـ هي مجموعة التعويض .

وفي حالة أن ﺃ < ٠ ، فإن ﺃ يكون عدداً سالباً، وتكون مجموعة الحل هي {−١ ، −٢ ، −٣ ، . . .}

وإذا طلب منك أن تذكر عدداً صحيحاً غير الصفر ، فإن هذا العدد : إما يكون عدداً موجباً أو عدداً سالباً، ونكتب ذلك على صورة متراجحة كالتالي : ﺃ ≠ ٠

وتكون مجموعة الحل هي { . . . ٣ ، ٢ ، ١ ، −١ ، −٢ ، −٣ ، . . . }

المتراجحة هي جملة مفتوحة تحتوي إحدى علامات الترجيح > ، < ، ≥ ، ≤ ، ≠ ؛ وتقرأ هذه الرموز على النحو التالي « أصغر من ، أكبر من ، أصغر من أو يساوي ، أكبر من أو يساوي ، لا يساوي» على الترتيب .

مجموعة الحل هي مجموعة كل العناصر التي تنتمي إلى مجموعة التعويض وتحقق المتراجحة .

ومن صور المتراجحات :

(١) س > ٠ (٢) ٢ل + ٤ < ٠

(٣) ٢هـ + ٣ < − ٣ (٤) ٣ع + ٤ > ٥ع + ٦

(٥) ٠ > ٣ص + ٣ > ٩

مثـال

لتكن سہ = { ٥ ، ٣ ، ١ ، ٠ ، − ١ ، − ٣ ، − ٥ } ، فأوجد مجموعة الحل لكل من المتراجحات التالية ، حيث سہ هي مجموعة التعويض.

أ) أ ≥ ١ ب) س ≤ ٠ جـ) − ١ ≥ ع > ٣

الحل :

أ) مجموعة الحل = { ١ ، ٠ ، − ١ ، − ٣ ، − ٥ }

ب) مجموعة الحل = { ٠ ، ١ ، ٣ ، ٥ }

جـ) مجموعة الحل = { ١ ، ٠ ، − ١ }

تمارين ومسائل

[١] اكتب المتراجحة ، مجموعة الحل، مجموعة التعويض لما يأتي :

أ) س عدد طبيعي أكبر من ٥ ،

ب) ع عدد صحيح أصغر من ٧ ، وأكبر من أو يساوي − ٨

[٢] إذا كانت ع = { −٢ ، ٠ ، ٢ ، ٤ ، ٦ } ، اكتب مجموعة الحل لكل مما يأتي علماً بأن ع هي مجموعة التعويض .

أ) ص > ٢

ب) ٢ ≥ هـ ≥ ٤

جـ) س ≤ ٤

٤ : ٦ حل المتراجحات من الدرجة الأولى في متغير واحد

لقد درست سابقاً حل المعادلات وقد استعنت في حلها باستخدام قواعد التحويلات المكافئة ، وفي هذا الدرس سنقوم بحل المتراجحات مستعينين أيضاً بقواعد التحويلات المكافئة للمتراجحات .

قواعد التحويلات المكافئة للمتراجحات :

لكل س ، ب ، حـ $\in$ صـ :

أ) إذا كان س $\geqslant$ ب فإن س + حـ $\geqslant$ ب + حـ

ب) إذا كان س $\geqslant$ ب فإن س − حـ $\geqslant$ ب − حـ

جـ) إذا كان س $\geqslant$ ب ، حـ $>$ ٠ ، فإن س حـ $\geqslant$ ب حـ

ء) إذا كان س $\geqslant$ ب ، حـ $<$ ٠ ، فإن س حـ $\leqslant$ ب حـ

هـ) إذا كان س $\geqslant$ ب ، حـ $>$ ٠ ، فإن $\frac{\text{س}}{\text{حـ}} \geqslant \frac{\text{ب}}{\text{حـ}}$

و) إذا كان س $\geqslant$ ب ، حـ $<$ ٠ ، فإن $\frac{\text{س}}{\text{حـ}} \leqslant \frac{\text{ب}}{\text{حـ}}$

مثال (١)

حل المتراجحة : ٣س + ٩ $\geqslant$ − ٦ في صـ ، ومَثِّل الحل على خط الأعداد .

الحل :

٣س + ٩ $\geqslant$ − ٦

٣س + ٩ − ٩ $\geqslant$ − ٦ − ٩ (بطرح ٩ من طرفي المتراجحة) .

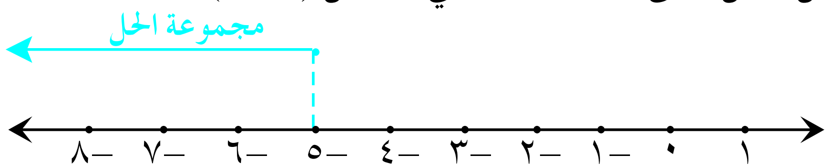
٣س $\geqslant$ − ١٥

$\frac{\text{٣ س}}{\text{٣}} \geqslant \frac{\text{−١٥}}{\text{٣}}$ (بقسمة طرفي المتراجحة على ٣)

س $\geqslant$ − ٥

∴ مجموعة الحل = {– ٥ ، – ٦ ، – ٧ ، ...}

ويمثل الحل على خط الأعداد في الشكل (٤–١) :



شكل (٤ – ١)

مثال (٢)

حل المتراجحة : س – ٦ < ٧س – ١٨ في صـ ، ومثِّل الحل على خط الأعداد .

الحل :

س – ٦ < ٧س – ١٨

س – ٦ + ٦ < ٧ س – ١٨ + ٦   (بإضافة ٦ إلى طرفي المتراجحة) .

س < ٧ س – ١٢

س – ٧س < ٧س – ١٢ – ٧س

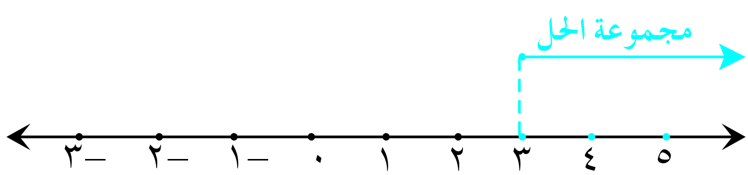
– ٦ س < – ١٢   (بقسمة طرفي المتراجحة على ٦) .

$$\frac{-\text{٦س}}{-\text{٦}} > \frac{-\text{١٢}}{-\text{٦}}$$

س > ٢

∴ مجموعة الحـــل = { ٣ ، ٤ ، ٥ ، ...}

ويمثل الحل على خط الأعداد في الشكل (٤– ٢) .



شكل (٤ – ٢)

مثال (٣)

حل المتراجحة : – ٣ ≤ ٤ ل + ٥ < ١٧ في صه، ومثل الحل على خط الأعداد.

الحل : – ٣ ≤ ٤ ل + ٥ < ١٧

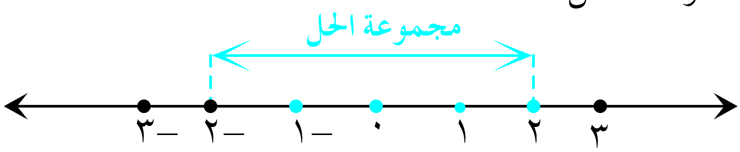
– ٣ – ٥ ≤ ٤ ل + ٥ – ٥ < ١٧ – ٥ (بطرح ٥ من أطراف المتراجحة).

– ٨ ≤ ٤ ل < ١٢

$\frac{-٨}{٤}$ ≤ $\frac{٤ل}{٤}$ < $\frac{١٢}{٤}$ (بقسمة أطراف المتراجحة على ٤) .

– ٢ ≤ ل < ٣

∴ مجموعة الحل = {– ٢ ، – ١ ، ٠ ، ١ ، ٢}



شكل (٤ – ٣)

الشكل (٤ – ٣) يمثل مجموعة الحل .

مثال (٤)

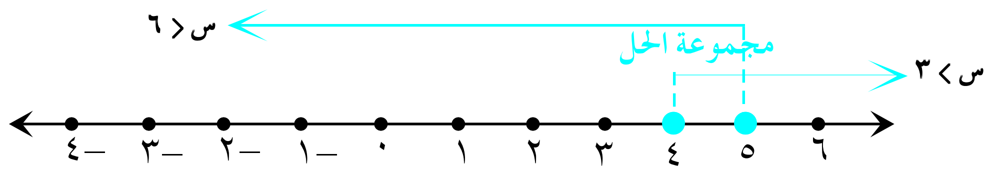
أوجد مجموعة الحل المشترك للمتراجحتين التاليتين ومَثِّل الحل على خط الأعداد :

٢ س – ٧ < ٥ ، ٣ س + ٥ > ١٤

الحل :

٢ س – ٧ < ٥	٣ س + ٥ > ١٤
٢ س – ٧ + ٧ < ٥ + ٧	٣ س + ٥ – ٥ > ١٤ – ٥
٢ س < ١٢	٣ س > ٩
$\frac{٢}{٢}$ س < $\frac{١٢}{٢}$	$\frac{٣}{٣}$ س > $\frac{٩}{٣}$
س < ٦	س > ٣
مجموعة الحل =	مجموعة الحل =
{٥ ، ٤ ، ٣ ، . . .}	{٤ ، ٥ ، ٦ ، . . .}

مجموعة الحل المشترك للمتراجحتين = { ٤ ، ٥ }



شكل (٤ –٤)

تمارين ومسائل

[١] إذا كان ﺃ ≥ ب فضع إشارة المتراجحة المناسبة في الفراغ :

أ) ﺃ + ٤ ☐ ب + ٤   ب) ﺃ – ٦ ☐ ب – ٦

حـ) $\frac{ﺃ}{٧}$ ☐ $\frac{ب}{٧}$ ء) – ٤ ﺃ ☐ – ٤ ب

هـ) ٢ ﺃ ☐ ٢ ب   و) $\frac{-ﺃ}{٩}$ ☐ $\frac{-ب}{٩}$

[٢] أوجد مجموعة الحل للمتراجحات التالية، ومَثِّل الحل على خط الاعداد .

أ) ٢ ﺃ > ٤   اعتبر مجموعة التعويض ط

ب) –٣ س ≥ ٩   اعتبر مجموعة التعويض صـ

جـ) ٦ ﺃ ≠ ١٢   اعتبر مجموعة التعويض صـ+

ء) ٠ < س + ٧ < ١٧   اعتبر مجموعة التعويض صـ–

[٣] أوجد مجموعة الحل للمتراجحات التالية في صـ، ومَثّل الحل على خط الأعداد .

أ) ١٣س – ٥ < ١٢٥   ب) ٢ﺃ + ٥ ≥ ٣ﺃ – ٢

جـ) – ل + ٣ ≤ ٥ ل – ٩   ء) ٦ ≥ ٤ هـ – ٦ ≥ ٢٢

[٤] أوجد مجموعة الحل المشترك لكل من المتراجحات التالية ، ومثل الحل على خط الأعداد :

أ) ٤س – ١٩ > ١٧ ، ٢س + ٧ < ٩

ب) ٥ ل + ٧٥ > ١٢٥ ، ٢ ل + ٣ > ٥

جـ) ٣ هـ – ٦ < هـ ، ٣ هـ ≥ ١٥

٤ : ٧ تمارين عامة ومسائل

[١] حل المعادلات التالية، وتحقق من صحة الحل ؛ علماً بأن مجموعة التعويض هي مجموعة الأعداد الصحيحة :

أ) ٧س – ٣س = – ٤٠ ب) ٣س – ٨ = س + ٢

جـ) ٥س – ٦ = ١٠ – ٣س ء) ٩ + س = ١٢

هـ) ٣ س – ١٠ = س و) ٥ + م = ٣٨

[٢] حل المعادلات التالية وتحقق من صحة الحل ، علماً بأن مجموعة التعويض هي صـ+

أ) ٦ س = ٢٤ ب) ٤س + ١٣ – ٧س + ٣٦ = ١٢س + ٣٤

جـ) س – ١٢ = –٧

[٣] أوجد مجموعة الحل للجملة المفتوحة التالية :

س عدد زوجي رمزه مكون من رقم واحد، حيث س ∈ ط

[٤] اكتب الجمل المفتوحة التالية على صورة متراجحات :

أ) طول حسين أصغر من مترين، وأكبر من متر .

ب) ثلاثة أمثال المسافة بين صنعاء وتعز تقل عن ٩٠٠ كيلومتر وتزيد عن ٦٠ كيلو متر .

جـ) أربعة أمثال ثمن كتاب تزيد عن ١٠٠٠ ريال .

[٥] أوجد مجموعة الحل للمتراجحات التالية ، إذا كانت مجموعة التعويض هي {١ ، ٣ ، ٥ ، ... ، ١٩}:

أ) ٧س − ٤ ≥ ٣١ ب) ٥س − ٩ > ٦

جـ) ٩ ل − ٧ ≠ ٢٠ ء) ع − ٤ ≤ ٩

[٦]حل المتراجحات التالية في صه، ومثّل الحل على خط الأعداد .

أ) ٣س + ٥ > ٢٣ ب) ٧ ل + ٢٥ ≥ ٧٤

جـ) ٦> ٣ ص + ٣ ≥ ١٢ ء) ٣ هـ − ٥ ≤ ٥ هـ + ٣

[٧] أوجد مجموعة الحل المشتركة لكل من المتراجحات التالية في صه ، ومثّل الحل على خط الأعداد :

أ) ٢م + ٦ > ١٢ ، ٤م − ٩ > ٣٩

ب) س + ٥ > ٠ ، س + ٢ > ٣

جـ) ٨٠ هـ + ٢٥ ≤ ١٨٥ ، ٥ هـ + ٦ > ٤٦

[٨] إذا كان ثمن ساعة يزيد عن ثمن حقيبة بمقدار ١٢٠٠ ريال ، وكان ثمنهما معاً يساوي ٤٨٠٠ ريال ، فأوجد ثمن كل من الحقيبة والساعة.

[٩] مستطيل محيطه يساوي ٦٠سم ، فأوجد كلاً من طوله وعرضه إذا علمت أن عرض المستطيل يقل عن طوله بمقدار ٨سم .

[١٠] إذا كان الأجر اليومي لخمسة نجارين ، وسبعة حدادين يساوي ٢٠١٠٠ ريال ، فأوجد أجر كل من النجار والحداد إذا علمت أن أجر النجار يقل عن أجر الحداد بمقدار ٣٠٠ ريال .

٤ :٨ اختبار الوحدة

[١] صنِّف كلاً من الجمل التالية إلى جمل صائبة أو خطأ أو جمل مفتوحة :

أ) س = ٠

ب) ٥ ∋ {٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٠}

جـ) ص ≠ ٠

ء) ع عدد صحيح فردي .

هـ) ٢ < ل ⩽ ٣ ،

و) وجوب الجهاد ضد اليهود المحتلين في فلسطين .

[٢] إذا كانت مجموعة التعويض هي {٥ ، ١٠ ، ١٥ ، ٢٠ ، ٢٥ ، . . .} ،

فإن مجموعة الحل للجملة المفتوحة « س عامل من عوامل العدد ١٥ » هي :

أ) {٥ ، ١٥} ب) {٣}

جـ) {٣ ، ٥} ء) {١ ، ٣ ، ٥}

[٣] أوجد مجموعة الحل لكل مما يأتي، علماً بأن مجموعة التعويض هي صـ

ثم تحقق من صحة الحل :

أ) ٢ س + ١ = ٩

ب) ٥س – ٢ = س + ١٠

[٤] عددان الفرق بين الأول والثاني ٥ ، ومجموعهما ٢٣ ؛ فأوجد العددين.

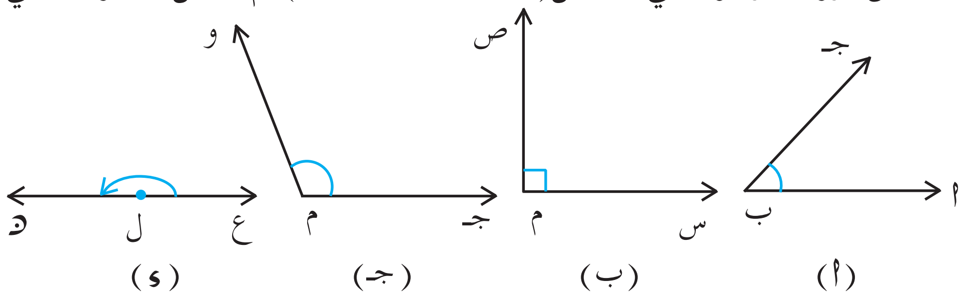
[٥] حل المتراجحة : ١٧ س – ٥ < ٥ س + ٣١ في صـ

٥ : ١ أنواع الزوايا

سبق وأن تعرفت على أربعة أنواع من الزوايا هي : الزاوية الحادة ، الزاوية القائمة ، الزاوية المنفرجة ، الزاوية المستقيمة .

نشاط

قس الزوايا المرسومة في الشكل(٥–١أ ، ب ، جـ ، ء)ثم أكمل الجدول التالي :



شكل (٥ –١)

رقم الشكل	(أ)	(ب)	(جـ)	(ء)
اسم الزاوية				
قياس الزاوية				
نوع الزاوية				

من الجدول يتبين لك أن :

∡ أ ب جـ زاوية حادة ، لماذا ؟

∡ س م ص زاوية قائمة ، لماذا ؟

∢ جـ م و زاوية منفرجة ، لماذا ؟

∢ ع ل د زاوية مستقيمة ، لماذا ؟

تذكر :

الزاوية الحادة قياسها أكبر من صفر وأصغر من ٩٠ْ .

الزاوية القائمة قياسها يساوي ٩٠ْ .

الزاوية المنفرجة قياسها أكبر من ٩٠ْ وأصغر من ١٨٠ْ .

الزاوية المستقيمة قياسها يساوى ١٨٠ْ .

الزاوية المنعكسة :

الزاوية التي قياسها أكبر من ١٨٠ْ وأصغر من ٣٦٠ْ تسمى زاوية منعكسة.

مثال (١)

أوجد قياس ∢ ا ب جـ (المنعكسة) في الشكل (٥–٢)

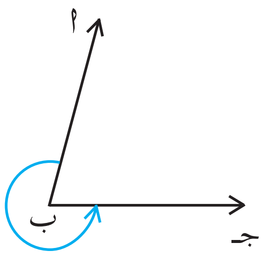
الحـــل :

لإيجاد قياس ∢ ا ب جـ (المنعكسة)

قس الزاوية ا ب جـ التي قياسها أصغر

من ٩٠ْ (استخدم المنقلة في القياس) .

ستجد أن: ق (∢ ا ب جـ) = ٧٥ْ ،



شكل (٥ – ٢)

∵ مجموع قياسي الزاويتين ا ب جـ ، ا ب جـ المنعكسة = ٣٦٠°

∴ قياس ∡ ا ب جـ (المنعكسة) = ٣٦٠° – ٧٥° = ٢٨٥°

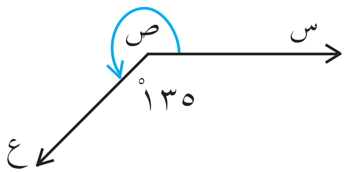
∴ ق (∡ ا ب جـ) المنعكسة = ٢٨٥°

مثال (٢)

من الشكل (٥–٣):

أوجد قياس الزاوية

س ص ع المنعكسة.



شكل (٥–٣)

الحل:

∵ مجموع قياسي الزاويتين س ص ع ، س ص ع المنعكسة = ٣٦٠° ،

ق (∡ س ص ع) المنعكسة = ٣٦٠° – ١٣٥°

∴ ق (∡ س ص ع) المنعكسة = ٢٢٥°

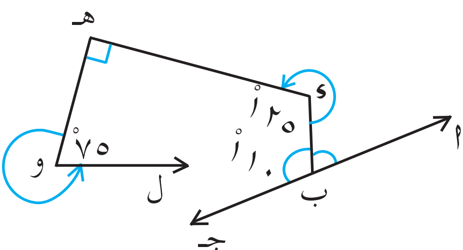
مثال (٣)

من الشكل (٥–٤): حدد نوع

الزوايا التالية:

∡ ا ب ء ، ∡ ء ب جـ ، ∡ ء هـ و ،

∡ هـ و ل ، ∡ ا ب جـ ، ∡ ب ء هـ



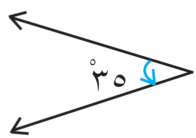
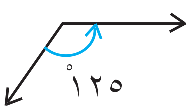
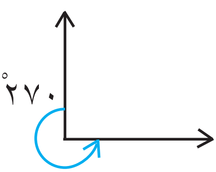
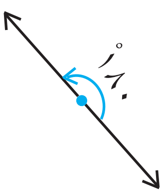
شكل (٥–٤)

الحـل :

الزاوية	نوعهـــا
∡ ا ب ء	حادة
∡ ء ب جـ	منفرجة
∡ ء هـ و	قائمة
∡ هـ و ل	منعكسة
∡ ا ب جـ	مستقيمة
∡ ب ء هـ	منعكسة

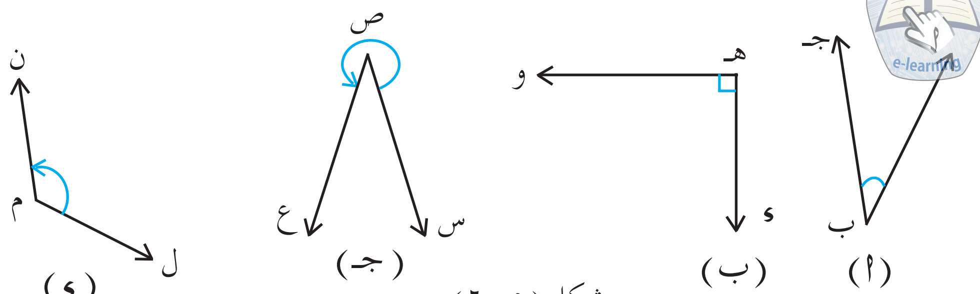
تماريـن ومسائـل

[١] أكمل الجدول التالي :

الزاوية				
نوعها	....	....	....	....

شكل (٥ – ٥)

[٢] قس ، ثم حدد نوع كل من الزوايا في الشكل (٥–٦) :



شكل (٥ –٦)

نوع الزاوية ... نوع الزاوية ... نوع الزاوية ... نوع الزاوية ...

[٣] (أ) إذا كان ق (∢ أ ب جـ) = ٤٥° فإن ق (∢ أ ب جـ) المنعكسة = ...

(ب) إذا كان ق (∢ ل م ن) = ١١٠° فإن ق (∢ ل م ن) المنعكسة = ...

[٤] من الشكل (٥–٧) :

حدد نوع الزوايا التالية :

∢ جـ ء هـ ، ∢ ب جـ ء ، ∢ جـ ب أ

شكل (٥ – ٧)

[٥] من الشكل (٥–٨) :

ما نوع كل من الزوايا التالية :

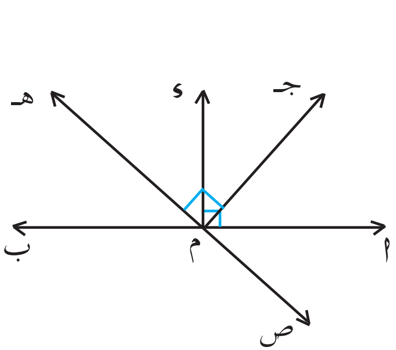
أولاً : ∢ أ م ب

ثانياً : ∢ أ م هـ

ثالثاً : ∢ أ م ء

رابعاً : ∢ جـ م هـ

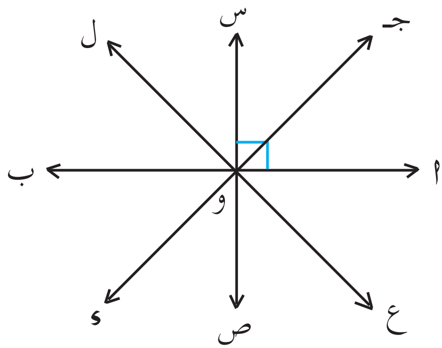
خامساً : ∢ أ م ص



شكل (٥ – ٨)

[٦] من الشكل (٥–٩) ، سمِّ :

- ٣ زوايا حادة .
- ٣ زوايا قائمة .
- ٣ زوايا منفرجة .
- ٣ زوايا مستقيمة .
- ٣ زوايا منعكسة .

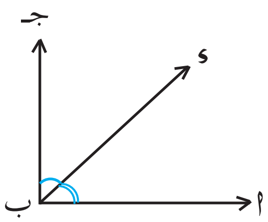


شكل (٥ – ٩)

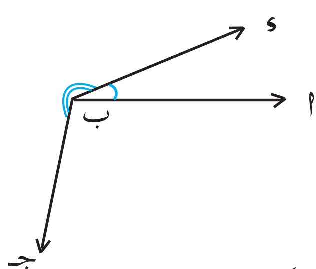
٥ : ٢ العلاقــــة بين الزوايـــا

الزاويتان المتجاورتان :

في الشكلين (٥ – ١٠) ، (٥ – ١١) الزاويتان أ ب ء ، ء ب جـ تشتركان في الرأس ب ، وفي الضلع ء ب ، وتقعان في جهتين مختلفتين من الضلع المشترك، تسمى هاتان الزاويتان زاويتان متجاورتان .



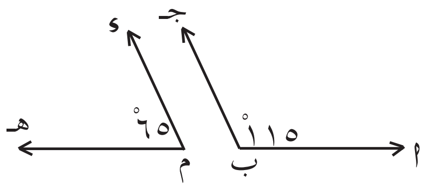
شكل (٥ – ١٠)



شكل (٥ – ١١)

الزاويتان المتكاملتان :

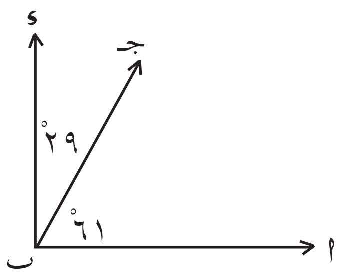
في الشكلين(٥–١٢)،(٥–١٣) :
زاويتان مجموع قياسيهما ١٨٠ْ ،تسمى كل زاويتين مجمـــوع قياسيهمـــا ١٨٠ْ زاويتان متكاملتان .



شكل (٥ – ١٢)   شكل (٥ – ١٣)

الزاويتان المتتامتان :

في الشكل (٥–١٤) يمكننا أن نحدد زاويتين مجموع قياسيهما ٩٠ْ، تسمى كل زاويتين مجموع قياسيهما ٩٠ْ زاويتان متتامتان .



شكل (٥ – ١٤)

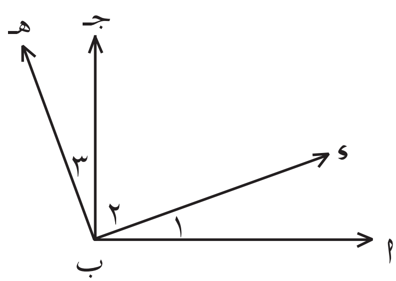
مثال (١)

في الشكل (٥ – ١٥) كل من

∡ أ ب جـ ، ∡ ء ب هـ قائمـة ،

فـــإذا كان ق (∡ ٢) = ٧٠ْ هـل

ق (∡ ١) = ق (∡ ٣)؟ ولماذا ؟



شكل (٥ – ١٥)

الحل :

∵ ق ∡ أ ب جـ قائمة

∴ ق (∡١) = ٩٠° – ٧٠° = ٢٠°

، ∵ ق ∡ ء ب هـ قائمة

∴ ق (∡٣) = ٩٠° – ٧٠° = ٢٠°

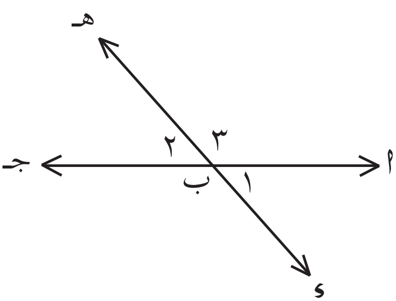
∴ ق (∡١) = ق (∡٣)

كرر الحل لنفس المثال عندما تكون ق (∡٢) = ٥٠° ، ٦٠°

مما سبق تستنتج أن :

الزاويتين المتممتين لزاوية واحدة متساويتان في القياس .

مثال (٢)



شكل (٥ – ١٦)

في الشكل (٥–١٦) :

∡ أ ب جـ مستقيمة ،

∡ ء ب هـ مستقيمة ،

فهل ق (∡١) = ق (∡٢)؟

ولماذا ؟

الحل :

∵ ق (∡١) + ق (∡٣) = ١٨٠°

∴ ق (∡١) = ١٨٠° – ق (∡٣) ———— (١)

∵ ق (∡ ٢) + ق (∡ ٣) = ١٨٠ْ

∴ ق (∡ ٢) = ١٨٠ْ − ق (∡ ٣) ——— (٢)

بمقارنة (١) ، (٢) نحصل على أن :

ق (∡ ١) = ق (∡ ٢)

مما سبق نستنتج أن :

الزاويتين المكملتين لزاوية واحدة متساويتان في القياس

مبرهنة (١) :

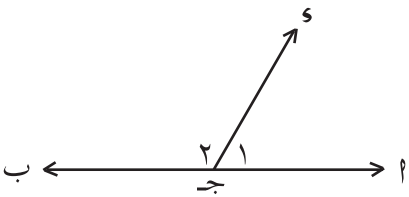
الزاويتان المتجاورتان الحادثتان من تلاقي شعاع بمستقيم متكاملتان .

المعطيات :

في الشكل (٥ − ١٧) :

جـ ء شعاع لاقى المستقيم أ ب

في جـ



شكل (٥ − ١٧)

المطلوب :

إثبات أن : ∡ ١ تكمل ∡ ٢

البرهان :

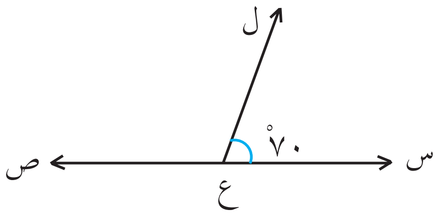
∵ ق (∡ ١) + ق (∡ ٢) = ق (∡ أ جـ ب) المستقيمة .

∴ ∡ ١ تكمل ∡ ٢

مثال (٢)

من الشكل (٥ − ١٨) :

احسب ق (∡ ل ع ص)



شكل (٥ − ١٨)

الحـــل :

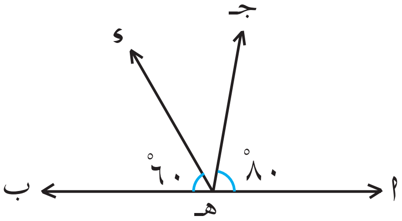
$\because$ ∢ س ع ل تكمل ∢ ل ع ص . لأن ∢ س ع ص مستقيمة .

$\therefore$ ق (∢ ل ع ص) = ١٨٠ْ – ٧٠ْ = ١١٠ْ

مثال (٣)

في الشكل (٥–١٩) ،

أوجد قيـــاس ∢ جـ هـ ء



شكل (٥ – ١٩)

الحـــل :

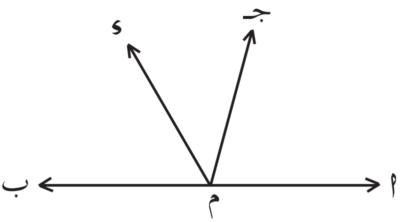
$\because$ ق (∢ أ هـ جـ) + ق (∢ ء هـ ب) = ٨٠ْ + ٦٠ْ = ١٤٠ْ

$\because$ ق (∢ أ هـ جـ) + ق (∢ جـ هـ ء) + ق (∢ ء هـ ب) = ١٨٠ْ

$\therefore$ ق ∢ جـ هـ ء = ١٨٠ْ – ١٤٠ْ = ٤٠ْ

تمارين ومسائـل

[١] سَمّ زوجين من الزوايا المتكاملة في الشكل (٥ – ٢٠) .



شكل (٥ – ٢٠)

[٢] اذكر زاويتين مجمـــوع قياسيهما ٩٠ْ

[٣] اذكر زاويتين مجموع قياسيهما ١٨٠ْ

[٤] ما قياس الزاوية المتممة للزاوية التي قياسها ٥٠ْ ؟

[٥] ما قياس الزاوية المكملة للزاوية التي قياسها °٨٠ ؟

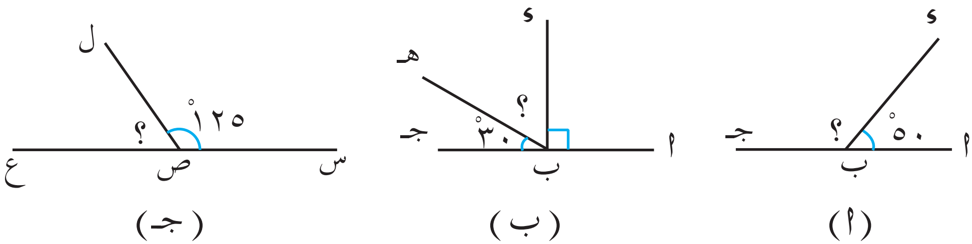
[٦] املأ الفراغات التالية :

(أ) الزاوية التي قياسها °٨٠ تتممها زاوية قياسها ... .

(ب) الزاوية التي قياسها °١٢٠ تكملها زاوية قياسها ... .

(حـ) الزاوية التي قياسها °٤٥ تتممها زاوية قياسها ... .

[٧] بدون استخدام المنقلة، أوجد قياس كل من الزوايا المجهولة في الأشكال (٥ – ٢١ أ ، ب ، جـ) .



شكل (٥ –٢١)

[٨] أكمل الجدول التالي :

قياس الزاوية	°٧٠	°٦٥	°١٤٠	°٧٥	°٣٥	°٩٠	°١٨٠
قياس متممتها	°٢٠						
قياس مكملتها	°١١٠						

[٩] ما قياس الزاوية المتممة والزاوية المكملة للزاوية °٦٠ ؟

[١٠] أكمل كما في المثال :

(أ) متممة الزاوية الحادة حادة ، ومكملة الزاوية الحادة منفرجة .

(ب) مكملة الزاوية القائمة ... . ومكملة الزاوية المنفرجة... .

٥ : ٣ الزوايا المتقابلة بالرأس

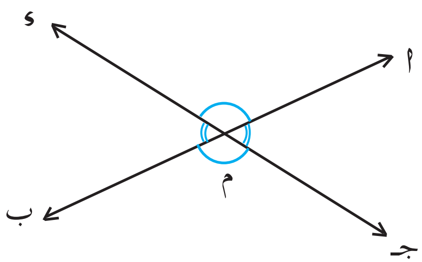
تأمل الشكل (٥ – ٢٢) ،

$\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{جـ ء}$ يتقاطعان في م :

– هل الزاويتان ا م جـ ، ء م ب متقابلتان بالرأس . ولماذا ؟

– هل الزاويتان ا م ء ، جـ م ب متقابلتان بالرأس . ولماذا ؟

– استخدم المنقلة لقياس الزوايا الأربع . . . وقارن قياساتها ، ماذا تستنتج ؟



شكل (٥ –٢٢)

مبرهنة (٢) :

إذا تقاطع مستقيمان ، فإن كل زاويتين متقابلتين بالرأس متساويتان في القياس .

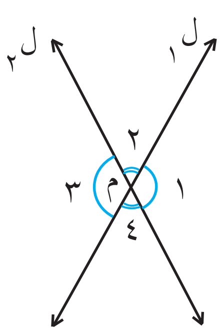
المعطيات : $\overleftrightarrow{ل_١}$ ، $\overleftrightarrow{ل_٢}$ يتقاطعان في النقطة م ،

[انظر الشكل (٥–٢٣)]

المطلوب : إثبات أن :

(١) ق (∡ ١) = ق (∡ ٣)

(٢) ق (∡ ٢) = ق (∡ ٤)



شكل (٥ –٢٣)

البرهان:

∵ ق (∡ ١) + ق (∡ ٢) = ١٨٠° ، لماذا ؟

، ∵ ق (∡ ٣) + ق (∡ ٢) = ١٨٠° ، لماذا ؟

∴ ق (∡ ١) + ق (∡ ٢) = ق (∡ ٣) + ق (∡ ٢)

وبطرح ق (∡ ٢) من الطرفين

ينتج أن : ق (∡ ١) = ق (∡ ٣) وهو المطلوب (١)

وبالمثل نجد أن : ق (∡ ٢) = ق (∡ ٤) وهو المطلوب (٢)

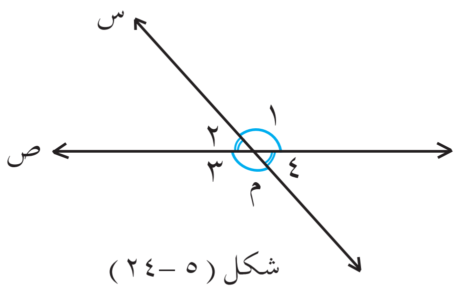
مثال (١)

فـــي الشكل (٥ – ٢٤) :

س ، ص يتقاطعان في م

فإذا كان ق (∡ ٤) = ٤٨°

فاحسب ق (∡ ١)، ق (∡ ٢)، ق (∡ ٣)



شكل (٥ –٢٤)

الحـــل :

∵ ∡ ٤ ، ∡ ١ متكاملتان

∴ ق (∡ ١) = ١٨٠° – ٤٨° = ١٣٢°

∵ ∡ ٤ ، ∡ ٢ متقابلتان بالرأس

∴ ق (∡ ٤) = ق (∡ ٢) = ٤٨°

كما أن : ∡ ١ ، ∡ ٣ متقابلتان بالرأس

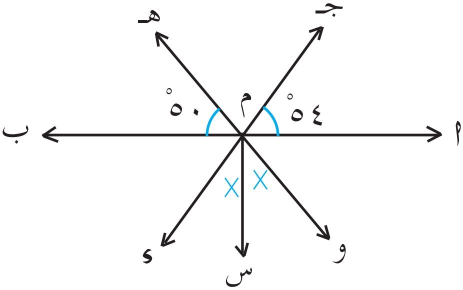
∴ ق (∡ ١) = ق (∡ ٣) = ١٣٢°

مثال (٢)

في الشكل (٥ – ٢٥) :

$\overrightarrow{\text{م س}}$ ينصف ∡ و م ء

أوجد ق (∡ و م س)



شكل (٥ –٢٥)

الحـل :

∵ ق (∡ أ م جـ) + ق (∡ جـ م هـ) + ق (∡ هـ م ب) = ١٨٠° . لماذا ؟

∴ ٥٤° + ق (∡ جـ م هـ) + ٥٠° = ١٨٠°

ق (∡ جـ م هـ) + ١٠٤° = ١٨٠°

بطرح ١٠٤° من الطرفين نجد أن

ق (∡ جـ م هـ) + ١٠٤° – ١٠٤° = ١٨٠° – ١٠٤°

∴ ق (∡ جـ م هـ) = ٧٦° ،

ق (∡ جـ م هـ) = ق (∡ و م ء) = ٧٦° ، (لماذا ؟)

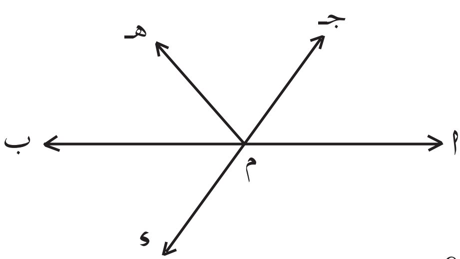
∴ ق (∡ و م س) = $\frac{\text{٧٦°}}{\text{٢}}$ = ٣٨° ، (لماذا؟)

تدريـب

فـــي الشكل (٥ – ٢٦) :

ق (∡ أ م جـ) + ق (∡ جـ م هـ)

+ ق (∡ هـ م ب) = ١٨٠° ، (لماذا؟) (١)



شكل (٥ –٢٦)

ق (∢ ......) + ق (∢ ......) = ١٨٠ْ ، (لماذا؟) (٢)

بجمع (١) ، (٢) ينتج أن :

ق (∢ ......) + ق (∢ ......) + ق (∢ ......) + ق (∢ ......)

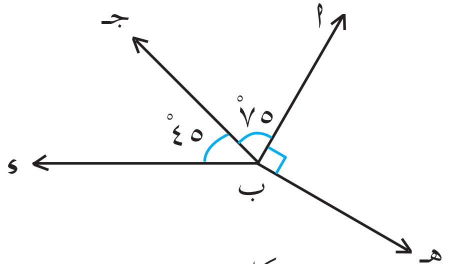
+ ق (∢ ......) = ٣٦٠ْ ، (لماذا؟)

مجموع قياسات الزوايا حول نقطة تساوى ٣٦٠ْ

مثال (٣)

من الشكل (٥–٢٧) :

أوجد ق (∢ ء ب هـ) .



شكل (٥ –٢٧)

الحـل :

ق (∢ أ ب جـ) + ق (∢ جـ ب ء) + ق (∢ ء ب هـ) + ق (∢ هـ ب أ) = ٣٦٠ْ

٧٥ْ + ٤٥ْ + ق (∢ ء ب هـ) + ٩٠ْ = ٣٦٠ْ

ق (∢ ء ب هـ) + ٢١٠ْ = ٣٦٠ْ

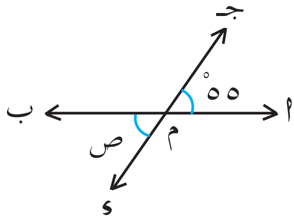
وبطرح ٢١٠ْ من الطرفين

ق (∢ ء ب هـ) + ٢١٠ْ – ٢١٠ْ = ٣٦٠ْ – ٢١٠ْ

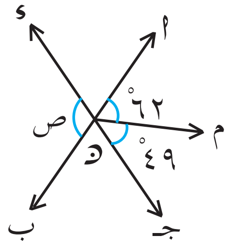
∴ ق (∢ ء ب هـ) = ١٥٠ْ .

تمارين ومسائل

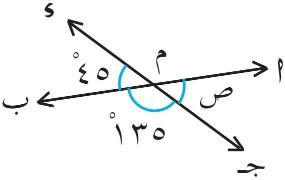
[١] أوجد قيم ص بالدرجات في كل من الأشكال (٥–٢٨أ ، ب ، جـ) .



شكل (٥ –٢٨أ)



شكل (٥ –٢٨ ب)



شكل (٥ –٢٨ جـ)

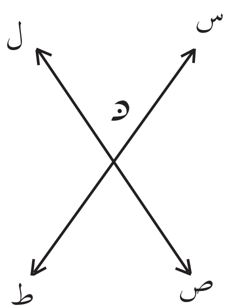
[٢] من الشكل (٥–٢٩) أكمل الفراغات التالية :

أ) ∡س د ل تجاور كلاً من ∡. . . ،

∡. . . ، وتقابلها بالرأس ∡. . . ،

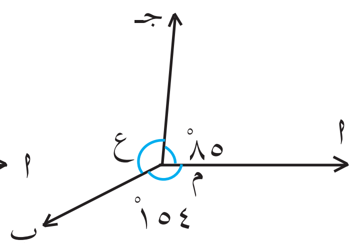
ب) ∡ ص د ط تجاور كلاً من∡. . . ،

∡. . . ، وتقابلها بالرأس ∡. . . .

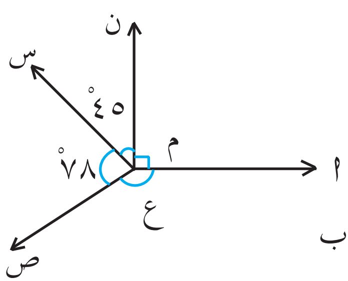


شكل (٥ –٢٩)

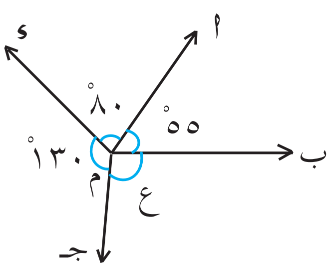
[٣] من الأشكال (٥–٣٠أ، ب ، جـ) ، أوجد قياس الزاوية ع بالدرجات :



شكل (٥ –٣٠أ)



شكل (٥ –٣٠ ب)



شكل (٥ –٣٠ جـ)

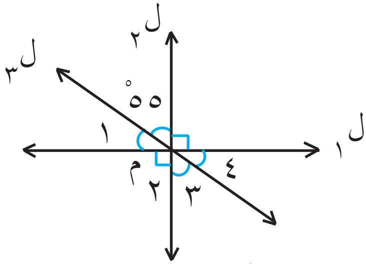
[٤] من الشكل (٥ – ٣١) :

أوجد قياس كل من الزوايا التالية :

∢ ١ ، ∢ ٢ ، ∢ ٣ ، ∢ ٤

مع العلم بأن : $\overleftrightarrow{ل_{١}}$ ، $\overleftrightarrow{ل_{٢}}$ ، $\overleftrightarrow{ل_{٣}}$

تتقاطع في م .

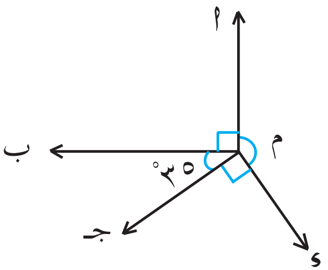


شكل (٥ – ٣١)

[٥] مـــن الشكـل (٥ – ٣٢) :

أوجـــد قيـــاس (∢ ا م ء)

بالدرجـــات .



شكل (٥ – ٣٢)

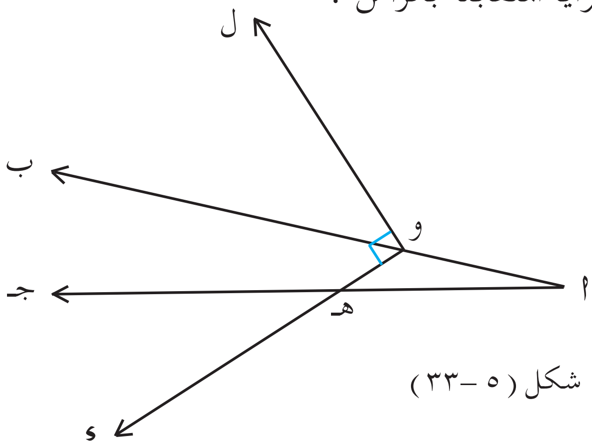
[٦] من الشكل (٥ – ٣٣) :

حدد كلاً من :

(ا) الزوايا المتتامة .

(ب) الزوايا المتكاملة .

(جـ) الزوايا المتقابلة بالرأس .



شكل (٥ – ٣٣)

[٧] في الشكل (٥ – ٣٤) :

$\overleftrightarrow{\text{أجـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ يتقاطعان في ب ،

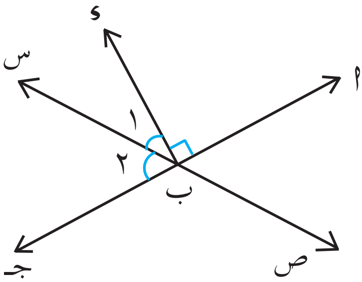
$\overrightarrow{\text{ب ء}} \perp \overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ ،

(١) احسب ق (∡ ١) + ق (∡ ٢)

(٢) سمِّ زوجين من الزوايا المتقابلة بالرأس.

(٣) سمِّ زاوية تتمم ∡ ١

(٤) سمِّ زوجاً من الزوايا التي تكمل ∡ ٢

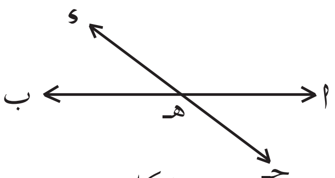


شكل (٥ – ٣٤)

٥ : ٤ المستقيمات المتوازية

– الشكل (٥ – ٣٥) يبين أن المستقيم

أ ب يقطع المستقيم جـ ء في النقطة هـ

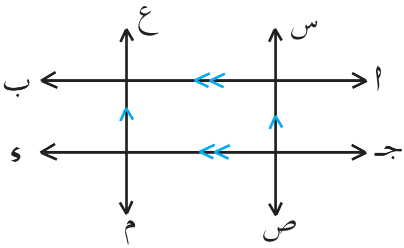


شكل (٥ – ٣٥)

– الشكل(٥–٣٦) يبين أن المستقيم أ ب

يوازي المستقيم جـ ء وكذلك

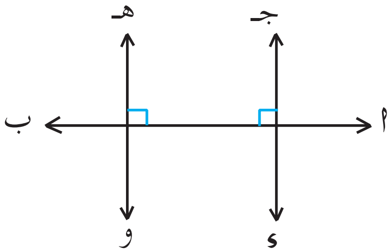
س ص يوازي المستقيم ع م



شكل (٥ –٣٦)

نشـــاط

ارسم المستقيـم أ ب ، ثـم استخـدم المثلث القائم لرسم مستقيمين جـ ء ، هـ و عموديين على المستقيم أ ب ، انظر الشكل(٥–٣٧)، ماذا تلاحظ على المستقيمين جـ ء ، هـ و ؟



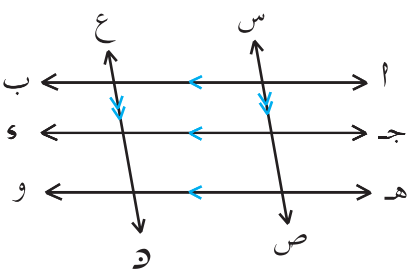
شكل (٥ –٣٧)

تعريـــف

أي مستقيمين في المستوى إما يكونان متقاطعين في نقطة واحدة أو متوازيين والمستقيمان المتوازيان لايلتقيان أبداً . ونرمز للتوازي بالرمز « // » فنكتب : $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـء}}$ [ويقرأ المستقيم أ ب يوازي المستقيم جـ ء] .

مثـــال

في الشكل (٥–٣٨) سمِّ أزواج المستقيمات المتوازية .



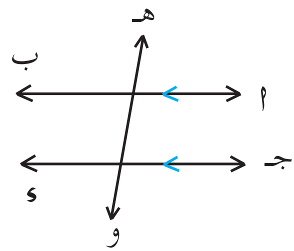
شكل (٥ –٣٨)

الحـــل :

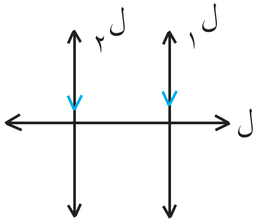
$\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـء}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{هـو}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـء}}$ // $\overleftrightarrow{\text{هـو}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{سص}}$ // $\overleftrightarrow{\text{عد}}$

تدريبات ومسائل

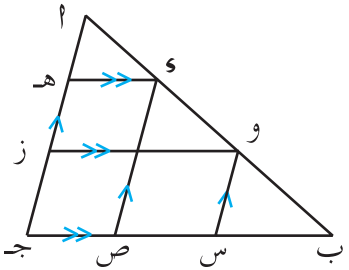
[١]حدد أزواج المستقيمات المتوازية في كل من الأشكال(٥–٣٩أ ، ب،جـ) :



شكل (٥ –٣٩أ)

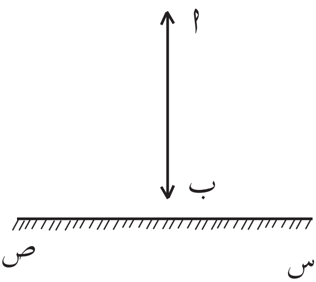


شكل (٥ –٣٩ب)

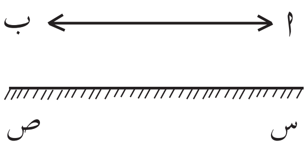


شكل (٥ –٣٩ جـ)

[٢] في أي من الشكلين (٥ – ٤٠أ ، ب) تكون صورة المستقيم أ ب في المرآة توازي سطح المرآة ؟



شكل (٥ –٤٠أ)



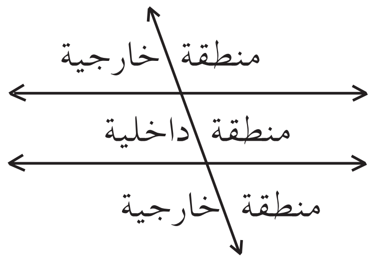
شكل (٥ –٤٠ب)

[٣] ارسم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ ثم $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ يوازي أحد المستقيمين أ ب أو جـ ء ، هل $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ يوازي المستقيم الآخر ؟

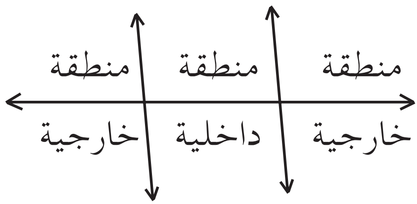
[٤] هل يمكن أن يمرّ عمودان على مستقيم واحد في نقطة واحدة ؟ لماذا ؟

٥ الزوايا المتبادلة والزوايا المتناظرة والزوايا الداخلية

١ – إذا قطع مستقيم أي مستقيمين في المستوى فإنه ينشأ من التقاطع ثلاث مناطق كما هو واضح من الشكلين (٥ – ٤١أ) ، (٥ – ٤١ب) .

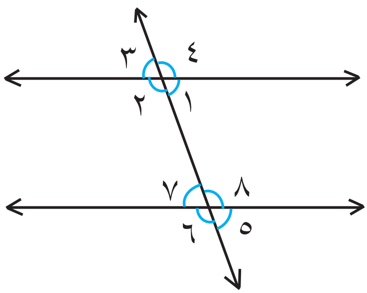


شكل (٥ – ٤١أ)



شكل (٥ – ٤١ ب)

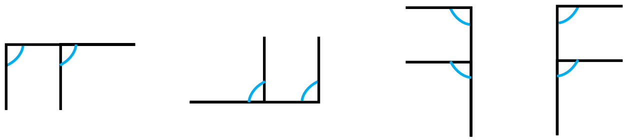
٢– إذا قطع مستقيم مستقيمين آخرين تكونت ٨ زوايا ، وكل زوج من الزوايا الناتجة سوف يعطي اسماً طبقاً لوضعه بالنسبة للمستقيمين والقاطع لهما . فمثلاً :



شكل (٥ – ٤٢)

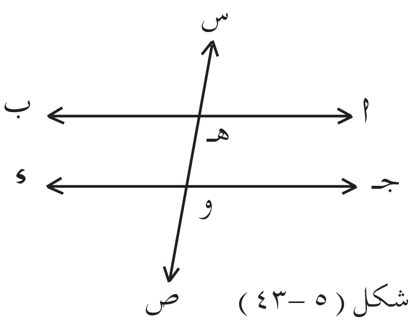
أ – الزاويتان ١ ، ٧ في الشكل (٥ – ٤٢) تقعان في المنطقة الداخلية وفي جهتين مختلفتين من القاطع لذا تسميان زاويتان متبادلتان ، وكذلك الزاويتين ٢ ، ٨ متبادلتان و يمكن تمييز الزاويتين المتبادلتين بتمثيلهما بالشكل (Z) في أوضاعه المختلفة :

ب – الزاويتان ٤ ، ٨ تقعان في جهة واحدة من القاطع وإِحداهما في المنطقة الداخلية ، والأخرى في المنطقة الخارجية لذا تسميان زاويتان متناظرتان ويمكن تمييز الزاويتين المتناظرتين بتمثيلهما بالشكل F في أوضاعه المختلفة :



جـ – الزاويتان ١ ، ٨ تقعان في المنطقة الداخلية وفي جهة واحدة من القاطع لذا تسميان زاويتان داخليتان أو « متحالفتين » وكذلك الزاويتان ٢ ، ٧ زاويتان داخليتان .

مثال (١)



شكل (٥ –٤٣)

في الشكل (٥–٤٣) : $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ يقطع كلاً من $\overleftrightarrow{\text{ا ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ في النقطتين هـ ، و على التوالي حدد :

ا – زوجين من الزوايا المتبادلة .

ب – زوجين من الزوايا المتناظرة .

جـ – زوجين من الزوايا الداخلية .

الحــل :

ا – ∡ ا هـ و ، ∡ هـ و ء و ∡ ب هـ و ، ∡ جـ و هـ

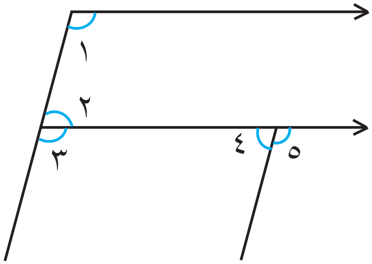
ب – ∡ س هـ ا ، ∡ هـ و جـ و ∡ ا هـ و ، ∡ جـ و ص

جـ – ∡ ا هـ و ، ∡ جـ و هـ و ∡ ب هـ و ، ∡ ء و هـ

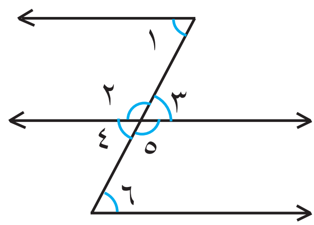
تدريب

في كل من الشكلين (٥–٤٤ أ ، ب) أوجد كل أزواج الزوايا :

أ) المتبادلة .   ب) المتناظرة .   جـ) الداخلية .



شكل (٥ –٤٤ب)

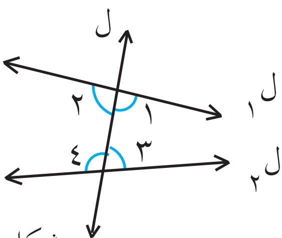


شكل (٥ –٤٤ أ)

نشاط

أولاً : في الشكل (٥–٤٥) المستقيم ل قاطع للمستقيمين ل$_١$ ، ل$_٢$ استخدم المنقلة لقياس كل من الزوايا المرقمة ، ثم أكمل الجدول الآتي :

الزاوية	١	٢	٣	٤
قياسها				



شكل (٥ –٤٥)

١ – هل ق(∡ ١) = ق(∡ ٤) ؟ الزاويتان ١ ، ٤ متبادلتان .

٢ – ما الزوج الآخر من الزوايا المتبادلة ؟ هل الزاويتان لهما القياس نفسه؟

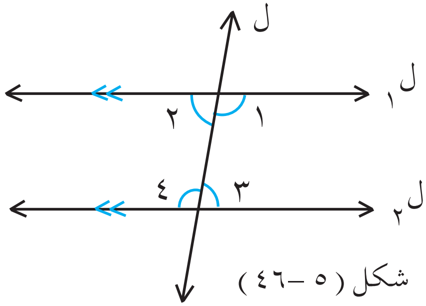
٣ – هل كل زاويتين متبادلتين متساويتان في القياس ؟

٤ – هل المستقيم ل$_١$ // المستقيم ل$_٢$ ؟

ثانياً : تأمل ماذا سيحدث إذا كان $ل_١$ ، $ل_٢$ متوازيين :

– في الشكل (٥–٤٦) المستقيم $ل_١$ // المستقيم $ل_٢$ ، والمستقيم ل قاطع لهما، استخدم المنقلة لقياس كلٍّ من الزوايا المرقمة ثم أكمل الجدول الآتي :

الزاوية	١	٢	٣	٤
قياسها				



شكل (٥ –٤٦)

١ – هل كل زاويتين متبادلتين في الشكل (٥–٤٦) متساويتان في القياس؟

٢ – ماذا تستنتج من كل من أولاً وثانياً ؟

حقيقة (١)

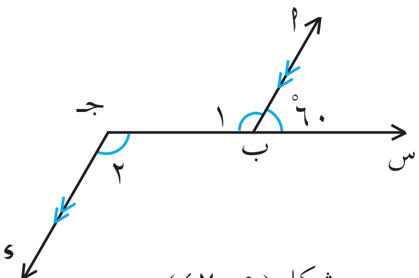
إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإن كل زاويتين متبادلتين متساويتان في القياس .

مثال (٢)

في الشكل (٥–٤٧) $\overleftarrow{ب أ}$ // $\overleftarrow{جـ ء}$ ،

و ق (∡ أ ب س) = ٦٠° ،

أوجد قياس كلٍّ من ∡ ١ ، ∡ ٢



شكل (٥ –٤٧)

الحل :

∡ أ ب س ، ∡ أ ب جـ متجاورتان ومتكاملتان .

∴ ق (∡ أ ب س) + ق (∡ أ ب جـ) = ١٨٠°

أي أن ٦٠° + ق (∡ أ ب جـ) = ١٨٠°

∴ ق (∡ أ ب جـ) = ١٨٠° – ٦٠° = ١٢٠°

، ∵ $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ // $\overleftarrow{\text{جـ ء}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ س}}$ قاطع لهما .

∴ ق (∡ ١) = ق (∡ ٢) لأنهما زاويتان متبادلتان

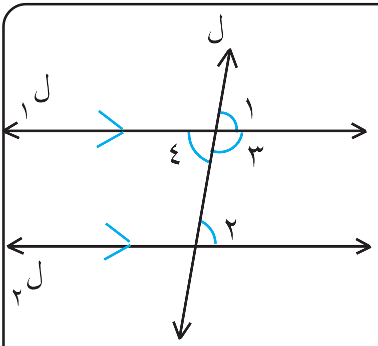
∴ ق (∡ ١) = ق (∡ ٢) = ١٢٠°

نتيجة (١)

إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإن :

أ – كل زاويتين متناظرتين متساويتان في القياس .

ب – مجموع قياسي كل زاويتين داخليتين وفي جهة واحدة من القاطع = ١٨٠°



شكل (٥ – ٤٨)

المعطيات :

$\overleftrightarrow{\text{ل}}_1$ // $\overleftrightarrow{\text{ل}}_2$ ، $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ قاطع لهما .

المطلوب : إثبات أن :

أ – ق (∡ ١) = ق (∡ ٢)

ب – ق (∡ ٢) + ق (∡ ٣) = ١٨٠°

البرهان :

أ – ق (∢ ١) = ق (∢ ٤)   (لماذا؟)

ق (∢ ٢) = ق (∢ ٤)   (لماذا؟)

∴ ق (∢ ١) = ق (∢ ٢)

ب – ق (∢ ١) + ق (∢ ٣) = ١٨٠°   (لماذا؟)

ولكن ق (∢ ١) = ق (∢ ٢)   (لماذا؟)

∴ ق (∢ ٢) + ق (∢ ٣) = ١٨٠°   وهو المطلوب .

تدريب

ماذا سيحدث إذا لم يكن المستقيمان $ل_١$ ، $ل_٢$ ، متوازيين ؟

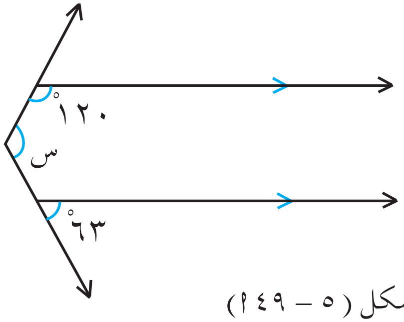
هل ستبقى الزوايا المتناظرة متساوية في القياس ؟

هل سيبقى مجموع قياسي الزاويتين الداخلتين = ١٨٠° ؟

مثال (٣)

من الشكل (٥–٤٩ أ) :

أوجد ق (∢ س) .



شكل (٥ – ٤٩ أ)

الحل :

ارسم مستقيماً يوازي المستقيمين الأفقيين كما هو مبين في الشكل (٥– ٤٩ ب) ،

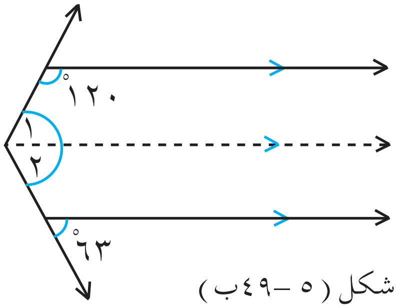
$120° +$ ق (∡ ١) = $180°$ (داخليتان)

ق (∡ ١) = $180° - 120° = 60°$

ق (∡ ٢) = $63°$ (لماذا؟)

∴ ق (∡ س) = ق (∡ ١) + ق (∡ ٢)

$= 60° + 63° = 123°$



شكل (٥ – ٤٩ ب)

نشـــاط

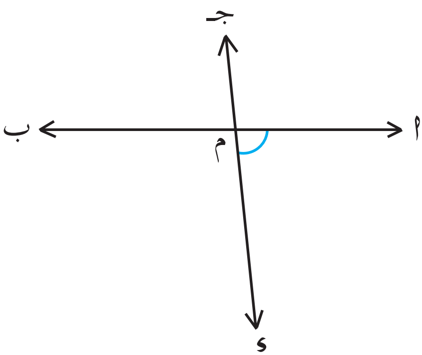
– ارسم مستقيمين أ ب ، جـ ء ، متقاطعين في النقطة م كما في الشكل (٥ – ٥٠ أ) .

– أوجد قياس الزاوية أ م ء .

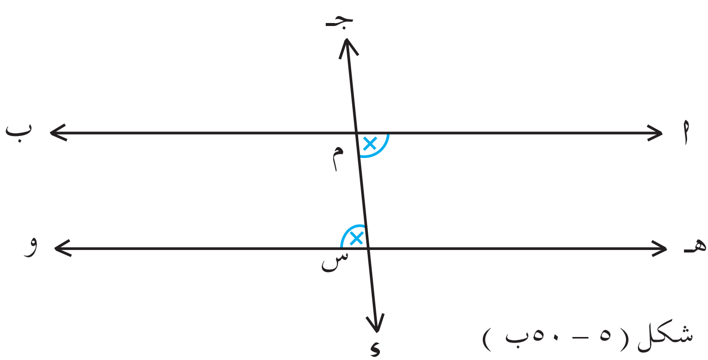
– ارسم مستقيماً ثالثاً هـ و يقطع المستقيم جـ ء في س كما في الشكل (٥ – ٥٠ ب) بحيث يكون ق (∡ أ م س) = ق (∡ م س و) .

هل $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ ؟

استخدم المسطرة والمثلث للتأكد من إجابتك .



شكل (٥ – ٥٠ أ)



شكل (٥ – ٥٠ ب)

عكس حقيقة (١)

إذا قطع مستقيم مستقيمين في المستوى وحدثت زاويتان متبادلتان ومتساويتان في القياس كان المستقيمان متوازيين .

نتيجة (٢)

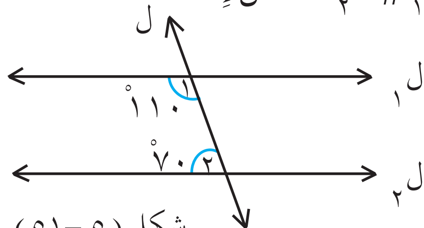
إذا قطع مستقيم مستقيمين في المستوى ، وحدثت زاويتان متناظرتان متساويتان في القياس كان المستقيمان متوازيين .

نتيجة (٣)

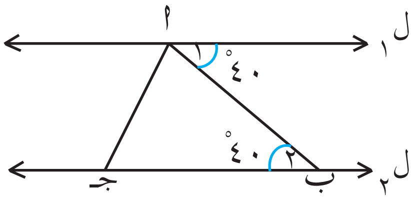
إذا قطع مستقيم مستقيمين في المستوى ، وحدثت زاويتان داخليتان مجموع قياسيهما = ١٨٠° كان المستقيمان متوازيين .

مثال (٤)

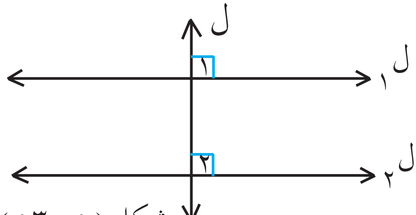
في الأشكال (٥–٥١) ، (٥ – ٥٢) ، (٥–٥٣) ، (٥–٥٤) ، هل ل١ // ل٢ ؟ علل إجابتك .



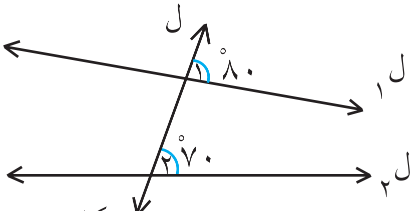
شكل (٥ – ٥١)



شكل (٥ – ٥٢)



شكل (٥ – ٥٣)



شكل (٥ – ٥٤)

الحل :

في الشكل (٥ – ٥١) $\overleftrightarrow{ل}_{١} // \overleftrightarrow{ل}_{٢}$ لأن ق(∢١) + ق(∢٢) = ١١٠° + ٧٠° = ١٨٠°

في الشكل (٥ – ٥٢) $\overleftrightarrow{ل}_{١} // \overleftrightarrow{ل}_{٢}$ لأن ∢١ ، ∢٢ متبادلتان ومتساويتان في القياس

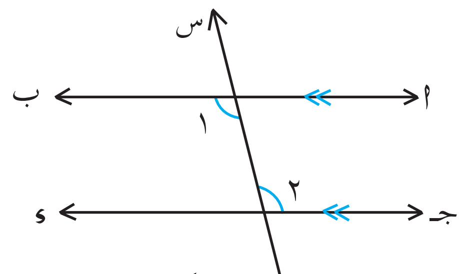
في الشكل (٥ – ٥٣) $\overleftrightarrow{ل}_{١} // \overleftrightarrow{ل}_{٢}$ لأن ∢١ ، ∢٢ متناظرتان ومتساويتان في القياس

في الشكل (٥ – ٥٤) $\overleftrightarrow{ل}_{١}$ لا يوازي $\overleftrightarrow{ل}_{٢}$ وذلك لأن ∢١ ، ∢٢ متناظرتان وغير متساويتين في القياس.

الخلاصة :

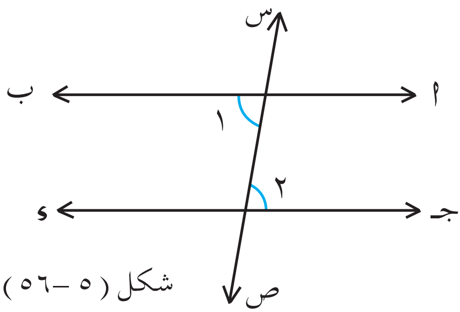
مما سبق مناقشته يمكن تلخيص علاقة الزوايا بالمستقيمات المتوازية كما يلي :

الزوايا المتبادلة



شكل (٥ – ٥٥)

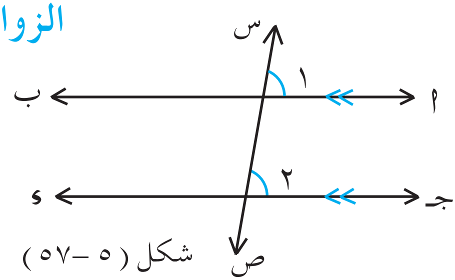
إذا كان $\overleftrightarrow{أب} // \overleftrightarrow{جـء}$ فإن ق(∢١) = ق(∢٢)



شكل (٥ – ٥٦)

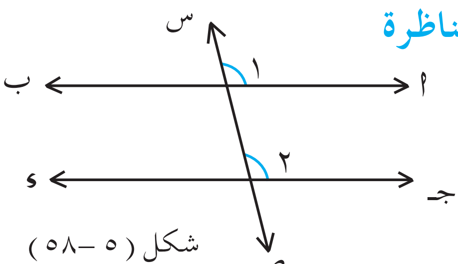
إذا كان ق(∢١) = ق(∢٢) فإن $\overleftrightarrow{أب} // \overleftrightarrow{جـء}$

الزوايا المتناظرة



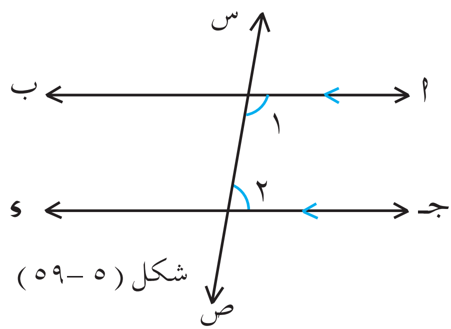
شكل (٥ – ٥٧)

إذا كان $\overleftrightarrow{أب} // \overleftrightarrow{جـء}$ فإن ق(∢١) = ق(∢٢)



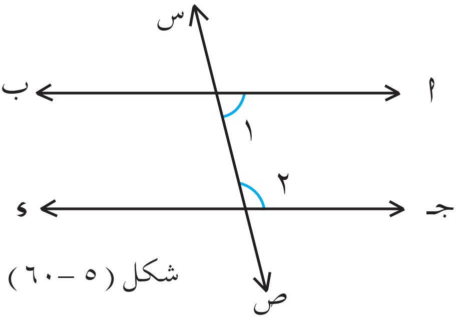
شكل (٥ – ٥٨)

إذا كان ق(∢١) = ق(∢٢) فإن $\overleftrightarrow{أب} // \overleftrightarrow{جـء}$



شكل (٥ – ٥٩)

إذا كان أب // جـ ء فإن ق(∡ ١)+ق(∡ ٢)=١٨٠°

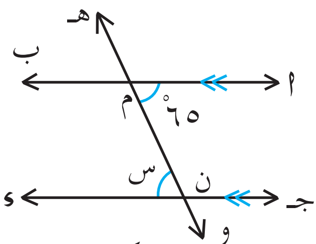


شكل (٥ – ٦٠)

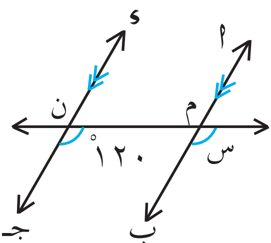
إذا كان ق(∡ ١)+ق(∡ ٢)=١٨٠° فإن أب // جـ ء

تدريبات ومسائل

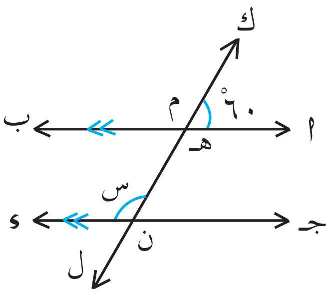
[١] في كل من الأشكال (٥–٦١ أ ، ب ، جـ) أب // جـ ء ، أوجد قيمة س بالدرجات مبيناً السبب في كل حالة .



شكل (٥ – ٦١ أ)



شكل (٥ – ٦١ ب)



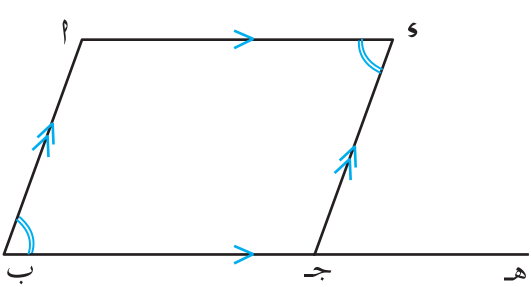
شكل (٥ – ٦١ جـ)

[٢] في الشكل (٥–٦٢)

أجب على الأسئلة الآتية :

أ – هل ق (∡ أ ب جـ) = ق (∡ ء جـ هـ) ؟

ب – هل ق (∡ أ ء جـ) = ق (∡ ء جـ هـ) ؟

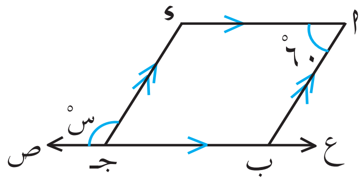


شكل (٥ – ٦٢)

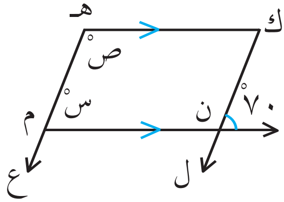
جـ – هل ق (∡ أ ب جـ) = ق (∡ أ ء جـ) ؟ اذكر السبب .

ء – ماذا تقول عن ق (∡ ب جـ ء) ، ق (∡ ب أ ء) ؟ اذكر السبب .

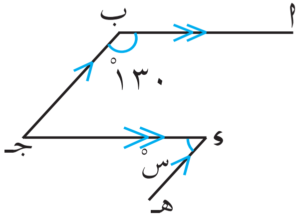
[٣] أوجد قياس كل الزوايا المشار إليها بالحروف في الأشكال التالية :



شكل (٥ –٦٣ أ)



شكل (٥ –٦٣ ب)

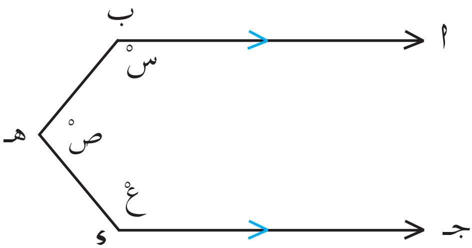


شكل (٥ –٦٣ جـ)

[٤] في الشكل (٥–٦٤) :

$\overleftarrow{\text{ب أ}} \parallel \overleftarrow{\text{ء جـ}}$ ،

احسب : س° + ص° + ع°



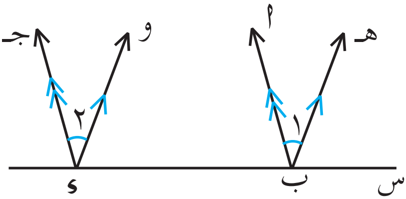
شكل (٥ –٦٤)

[٥] في الشكل (٥–٦٥) :

$\overleftarrow{\text{ب أ}} \parallel \overleftarrow{\text{ء جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب هـ}} \parallel \overleftarrow{\text{ء و}}$ ،

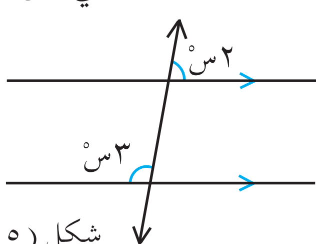
هل ق (∡ ١) = ق (∡ ٢) ؟

فسر إجابتك .

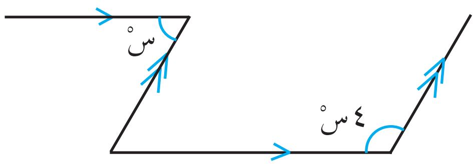


شكل (٥ –٦٥)

[٦] كوّن معادلة في س في كل حالة ثم حل المعادلة :



شكل (٥ –٦٦ أ)



شكل (٥ –٦٦ ب)

[٧] مستعيناً بالشكل (٥–٦٧) أجب عن الأسئلة الآتية :

أ – إِذا كان ق (∡ ١)=ق (∡ ٢) ،

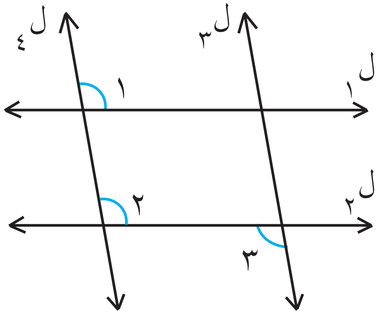
أي المستقيمين في الشكل يجب

أن يكونا متوازيين ؟ ولماذا ؟

ب–إِذا كان ق (∡ ٢)= ق (∡ ٣)

أي المستقيمين في الشكل يجب

أن يكونا متوازيين ؟ ولماذا ؟



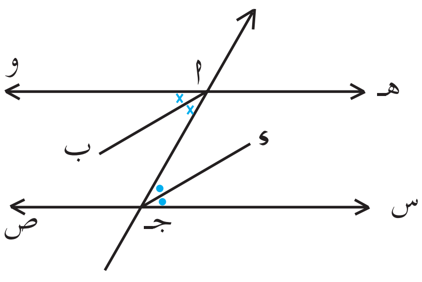
شكل (٥ –٦٧)

[٨] فـــي الشكل (٥ – ٦٨) :

$\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ // $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ ، $\overline{\text{أ ب}}$ منصف

∡ و أ جـ ، $\overline{\text{جـ ء}}$ منصف ∡ أ جـ س

أثبت أن $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{جـ ء}}$



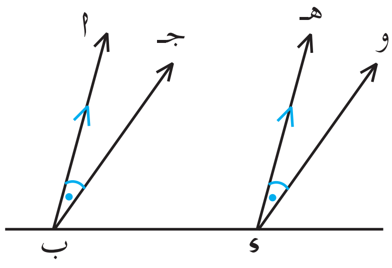
شكل (٥ –٦٨)

[٩] في الشكل (٥ – ٦٩)

$\overleftarrow{\text{ب أ}}$ // $\overleftarrow{\text{ء هـ}}$

ق (∡ أ ب جـ) = ق (∡ هـ ء و)

هل $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ // $\overleftarrow{\text{ء و}}$ ؟ مبيناً السبب .



شكل (٥ –٦٩)

٥ : ٦ زوايـــا المثلـــث

سبق أن وجدنا بالقياس أن مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي ١٨٠°

في هذا الدرس نقدم البرهان الهندسي على ذلك :

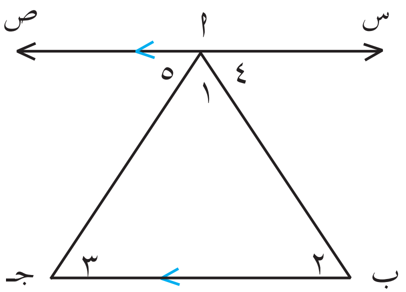
مبرهنة (٣) :

مجموع قياسات زوايا المثلث تساوى ١٨٠°

المعطيات : في الشكل (٥–٧٠) أ ب جـ مثلث .

المطلوب : إثبات أن :

ق (∠ ب أجـ) + ق (∠ ب) + ق (∠ جـ) = ١٨٠°



شكل (٥ –٧٠)

البرهان :

نرسم س↔ص // ب‾جـ يمر بنقطة الرأس أ

∵ س↔ص // ب‾جـ ، أ‾ب قاطع لهما ،

∴ ق (∠ ٤) = ق (∠ ٢) لماذا ؟

وبالمثل ق (∠ ٥) = ق (∠ ٣) . لماذا ؟

بالجمع ق (∠ ٤) + ق (∠ ٥) = ق (∠ ٢) + ق (∠ ٣)

بإضافة ق (∠ ١) للطرفين نجد أن :

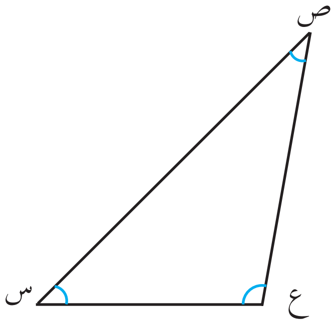
ق (∠ ٤) + ق (∠ ٥) + ق (∠ ١) = ق (∠ ٢) + ق (∠ ٣) + ق (∠ ١)

∵ ق (∠ ٤) + ق (∠ ٥) + ق (∠ ١) = ١٨٠° .... لماذا ؟

∴ ق (∠ ٢) + ق (∠ ٣) + ق (∠ ١) = ١٨٠°

∴ مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠° وهو المطلوب

مثال (١)



شكل (٥ – ٧١)

في الشكل (٥ – ٧١) :

س ص ع مثلث فيه : ق(∢ س) = ٤٥°

ق(∢ ص) = ٣٥° ، أوجد ق(∢ ع)

الحل :

ق(∢ س)+ق(∢ ص)+ ق(∢ ع) = ١٨٠° (لأن مجموع زوايا المثلث=١٨٠° «مبرهنة٣»)

٤٥° + ٣٥° + ق(∢ ع) = ١٨٠°

٨٠° + ق(∢ ع) = ١٨٠°

بطرح ٨٠° من الطرفين نجد أن :

٨٠° – ٨٠° + ق(∢ ع) = ١٨٠° – ٨٠°

ق(∢ ع) = ١٠٠°

الزاوية الخارجة عن المثلث :

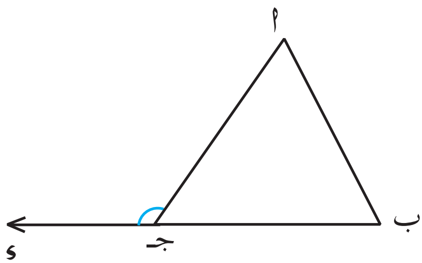
تأمل الشكل (٥ – ٧٢) :

أ ب جـ مثلث ، مدّ $\overline{\text{ب جـ}}$ على استقامته إلى نقطة ء ،

∢ أ جـ ء هي زاوية خارجة عن المثلث أ ب جـ

إذا مُدّت الأضلاع أ ب ، ب جـ ، جـ أ في اتجاه واحد .

فما عدد الزوايا الخارجة عن المثلث أ ب جـ ؟



شكل (٥ – ٧٢)

سمّ بعضها ؟

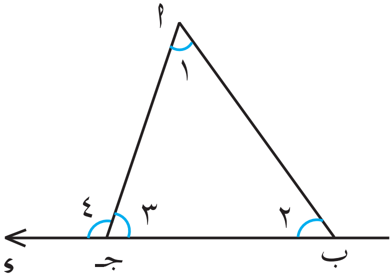
من ذلك نقول بأنه :

إذا مدّ أحد أضلاع المثلث على استقامته فإن الزاوية المحصورة بين امتداد هذا الضلع والضلع المجاور له تسمى زاوية خارجة .

مبرهنة (٤) :

الزاوية الخارجة عن المثلث تساوى مجموع الزاويتين الداخلتين غير المجاورة لها .

المعطيات : في الشكل(٥–٧٣) أ ب جـ مثلث، مدّت $\overline{\text{ب جـ}}$ على استقامتها إلى ء.



شكل (٥ – ٧٣)

المطلوب : إثبات أن :

ق ($\measuredangle$ ٤) = ق ($\measuredangle$ ١) + ق ($\measuredangle$ ٢)

البرهان :

ق ($\measuredangle$ ٤) + ق ($\measuredangle$ ٣) = ١٨٠° . (لماذا؟)

لكن ق ($\measuredangle$ ١) + ق ($\measuredangle$ ٢) + ق ($\measuredangle$ ٣) = ١٨٠° ، (لماذا؟)

$\therefore$ ق ($\measuredangle$ ٤) = ق ($\measuredangle$ ١) + ق ($\measuredangle$ ٢) (وهو المطلوب)

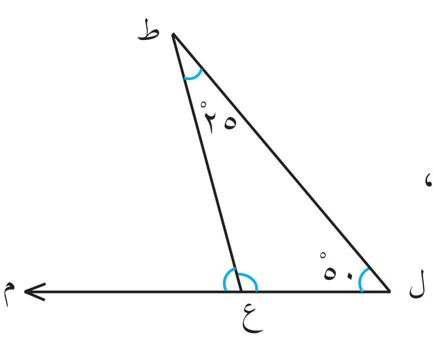
مثال (٢)

في الشكل (٥–٧٤) :

ط ل ع مثلث فيه : ق ($\measuredangle$ ل) = ٥٠° ،

ق ($\measuredangle$ ط) = ٢٥° ،

أوجد بالدرجات ق ($\measuredangle$ ط ع م)



شكل (٥ – ٧٤)

الحــل :

∵ ط ل ع مثلث ، ∡ ط ع م خارجة له

∴ ق (∡ ط ع م) = ق (∡ ع ل ط) + ق (∡ ل ط ع)

$= ٥٠° + ٢٥°$

$= ٧٥°$

∴ ق (∡ ط ع م) = $٧٥°$

تمارين ومسائــل

[١] إذا كان كل زوج من الدرجات التالية يمثل قياسي زاويتين في مثلث ما .

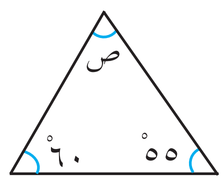
احسب قياس الزاوية الثالثة :

(١) $٣٧°$ ، $٥٨°$ ، . . .   (٢) $٩٩°$ ، $٤١°$ ، . . .

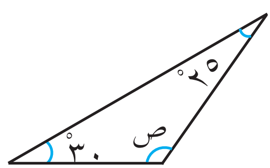
(٣) $٧٠°$ ، $٨٠°$ ، . . .

[٢] أوجــد قيــاس الزاويــة ص بالدرجــات فــي كل مــن الأشكـال

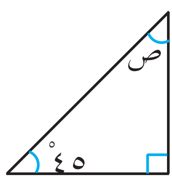
(٥ــ ٧٥أ ، ب ، جـ ، ء)



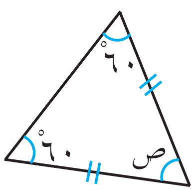
شكل (٥ ــ ٧٥أ)



شكل (٥ ــ ٧٥ ب)

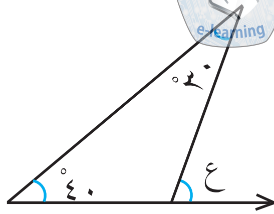


شكل (٥ ــ ٧٥جـ)

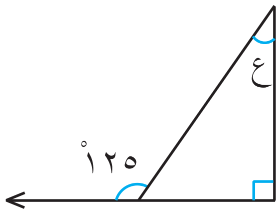


شكل (٥ ــ ٧٥ ء)

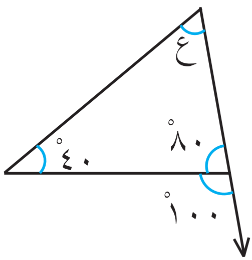
[٣] أوجد قياس الزاوية ع بالدرجات في كل من الأشكال (٥–٧٦أ، ب، جـ).



شكل (٥ –٧٦أ)



شكل (٥ –٧٦ ب)



شكل (٥ –٧٦جـ)

[٤] أي من الثلاثيات التالية تعتبر قياسات زوايا مثلث . اذكر السبب :

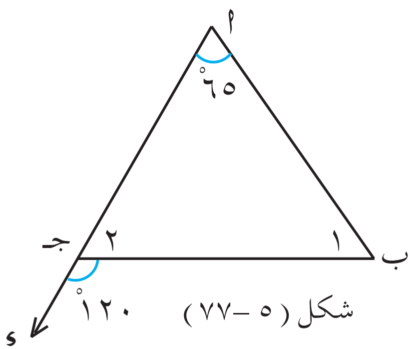
(أ) ٤٢° ، ٥٨° ، ٥٠°   (ب) ٩٠° ، ٤٥° ، ٤٥°

(جـ) ٢٥° ، ٨٢ ، ٧٣°   (ء) ١١٣° ، ٢٤° ، ٢٤°

(هـ) ٦٠° ، ٦٠° ، ٦٠°   (و) ٥٥° ، ٦٦° ، ٧٧°

[٥] من الشكل (٥ – ٧٧) :

أوجد ق(∡١) ، ق(∡٢) .

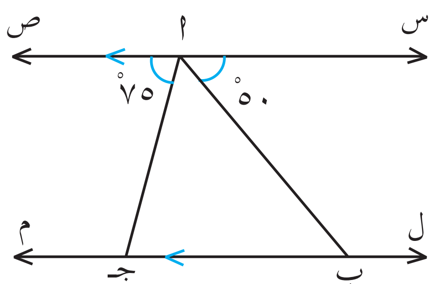


شكل (٥ –٧٧)

[٦] في الشكل (٥ – ٧٨) :

بدون استخدام المنقلة أوجد

قياسات زوايا المثلث أ ب جـ



شكل (٥ –٧٨)

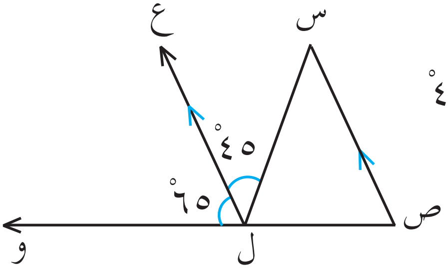
[٧] في الشكل (٥–٧٩) :

ص س // ل ع ، ق (∢س ل ع) = ٤٥°

ق (∢ع ل و) = ٦٥°

بدون استخدام المنقلة ، أوجد

قياسات زوايا المثلث س ص ل



شكل (٥–٧٩)

[٨] ا ب جـ مثلث مدّت قاعدته ب جـ من جهة جـ إلى ء ، ومدّت قاعدته جـ ب من جهة ب إلى هـ فإذا كانت ∢ ا جـ ء = ١٣٥° ، ∢ ا ب هـ = ١٥٠°

أوجد قياس كل زاوية من زوايا المثلث .

٥ : ٧ تطابـــق المثلثـــات

تأمل الأشكال (٥–٨٠) ،

شكل (٥–٨٠)

(٥–٨١ ا ، ب) ستجد أن :

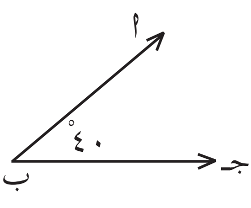
(١) القطعتين المستقيمتين ا ب ، جـ ء

متطابقتان لتساوي طوليهما.

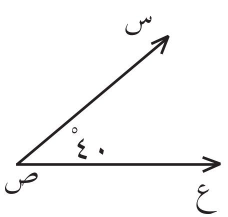
(٢) الزاويتين ا ب جـ ، س ص ع

متطابقتان لتساويهما في

القياس.



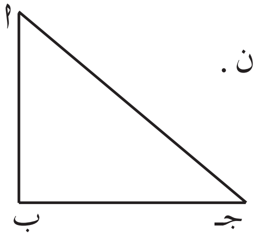
شكل (٥–٨١ ا)

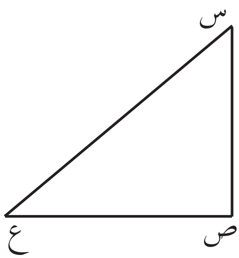


شكل (٥–٨١ب)

وتعرف أنه إذا أمكن وضع مثلث على آخر وانطبقت رؤوس أحدهما على رؤوس الآخر نقول إن المثلثين متطابقان .

نشاط





ΔΔ أ ب جـ ، س ص ع متطابقان .

انظر الشكلين (٥–١٨٢أ ، ب)

(١) استخدم المسطرة لقياس أطوال أضلاع المثلثين أ ب جـ ، س ص ع .

شكل (٥ – ١٨٢أ)

شكل (٥ – ١٨٢ب)

(٢) استخدم المنقلة لقياس زوايا المثلثين أ ب جـ ، س ص ع . ماذا تلاحظ؟

ستلاحظ أن :

(١) |أ ب| = |س ص| ، |ب جـ| = |ص ع| ، |أ جـ| = |س ع|

(٢) ق(∡ جـ) = ق(∡ ع) ، ق(∡ ب) = ق(∡ ص) ، ق(∡ أ) = ق(∡ س)

أي أن : (١) الأضلاع المتناظرة في المثلثين متطابقة .

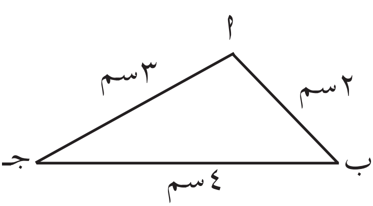
(٢) الزوايا المتناظرة في المثلثين متطابقة .

حالات تطابق المثلثات :

للمثلث ستة عناصر هي : ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا يلزم معرفة ثلاثة منها لرسم المثلث كما سيرد في الحالات التالية :

الحالة الأولى : تطابق الأضلاع الثلاثة :

نشاط



(١) ارسم المثلث أ ب جـ الذي فيه :

|أ ب| = ٢سم ، |ب جـ| = ٤سم ،

|أ جـ| = ٣سم ، [انظر الشكل (٥–١٨٣أ)]

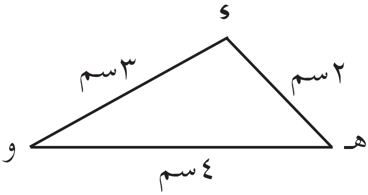
شكل (٥ – ١٨٣أ)

(٢) ارسم المثلث ء هـ و الذي فيه :

| ء هـ | = ٢ سم ، | هـ و | = ٤ سم

| ء و | = ٣ سم

[انظر الشكل (٥–٨٣ ب)]



شكل (٥ –٨٣ب)

(٣) انقل أحد المثلثين على ورق شفاف وطبقه على المثلث الآخر. ماذا تلاحظ؟

ستلاحظ أن المثلثين يتطابقان تمام الانطباق .

(٤) استخدم المنقلة لقياس الزوايا أ ، ب ، جـ ، ء ، هـ ، و

ستجد أن :

ق ($\angle$ أ) = ق ($\angle$ ء)، ق ($\angle$ ب) = ق ($\angle$ هـ) ، ق ($\angle$ جـ)=ق ($\angle$ و)

ماذا تستنتج ؟

تستنتج أنه : إذا تطابق مثلثان لتساوي أطوال أضلاعهما المتناظرة فإن زواياهما المتناظرة تتطابق أيضاً .

ينطبق المثلثان كل مع الآخر ، إذا طابق كل ضلع في المثلث الضلع المناظر له في المثلث الآخر . ونرمز لهذه الحالة بالرمز (ض ض ض) .

مثال (١)

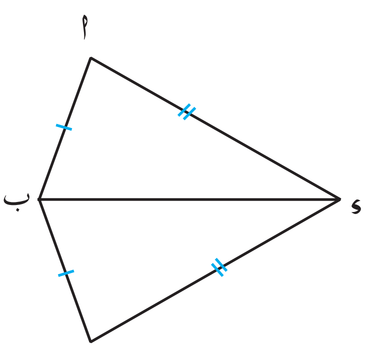
من الشكل (٥–٨٤) أثبت أن :

ق ($\angle$ أ) = ق ($\angle$ جـ) ،

المعطيات : الشكل الرباعي أ ب جـ ء فيه :

| أ ب | = | ب جـ | ، | أ ء | = | جـ ء | ،

$\overline{\text{ب ء}}$ قطر فيه .



شكل (٥ –٨٤)

المطلوب : إثبات أن :

ق (∢ ا) = ق (∢ جـ) ،

البرهان :

$\Delta\Delta$ ا ب ء ، جـ ب ء فيهما
|ا ب| = |ب جـ| ، معطى
|ا ء| = |جـ ء| ، معطى
$\overline{ب ء}$ ضلع مشترك

∴ ينطبق المثلثان وينتج أن : ق (∢ ا) = ق (∢ جـ) وهو المطلوب

مبرهنة (٥)

زاويتا القاعدة في المثلث المتساوي الساقين متطابقتان

المعطيات :

ا ب جـ مثلث فيه : |ا ب| = |ا جـ|

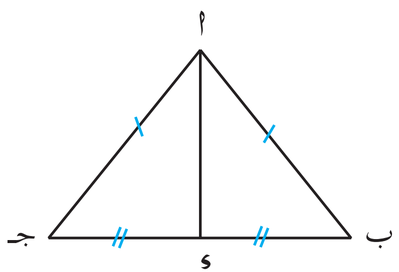
المطلوب : برهن أن :

ق (∢ ب) = ق (∢ جـ)،

العمل : ننصف $\overline{ب جـ}$ في النقطة « ء »

ثم نصل النقطة «ا» بالنقطة « ء »

[انظر الشكل (٥–٨٥)] .



شكل (٥ –٨٥)

البرهان :

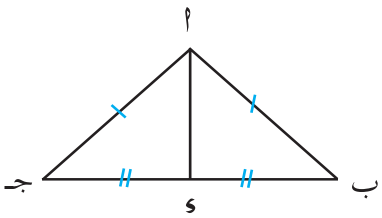
$\Delta\Delta$ ا ب ء ، ا جـ ء فيهما
|ا ب| = |ا جـ| ، معطى
|ب ء| = |جـ ء| ، عملاً
$\overline{ا ء}$ ضلع مشترك

∴ ينطبق $\Delta\Delta$ وينتج أن :

ق ($\measuredangle$ ا ب ء) = ق ($\measuredangle$ ا جـ ء) ،

أي أن : ق ($\measuredangle$ ب) = ق ($\measuredangle$ جـ) ، وهو المطلوب .

مثال (٢)



شكل (٥ –٨٦)

في الشكل(٥–٨٦)

| ا ب | = | ا جـ | ،

ق ($\measuredangle$ ب ا جـ) =٩٤° ،

النقطة « ء » تنصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ،

أوجد ق ($\measuredangle$ ب ا ء)

الحـــل :

نصل النقطتين ا ، ء ونحصل على أن Δ ا ب ء $\cong$ Δ ا جـ ء ، لماذا ؟

∴ ق ($\measuredangle$ ب ا ء) = ق ($\measuredangle$ جـ ا ء)

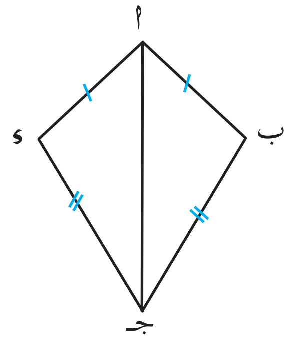
، ∵ ق ($\measuredangle$ ب ا ء) + ق ($\measuredangle$ جـ ا ء) = ٩٤° (معطاة)

∴ ٢ق ($\measuredangle$ ب ا ء) = ٩٤°

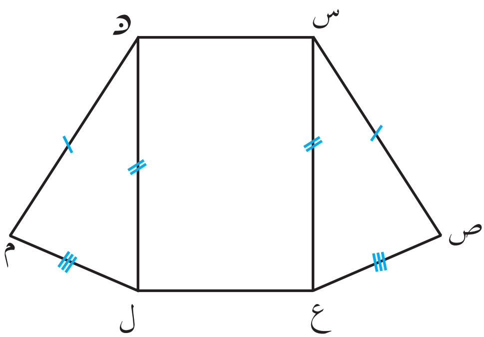
∴ ق ($\measuredangle$ ب ا ء) = $\frac{٩٤°}{٢}$ = ٤٧° وهو المطلوب

تمارين ومسائل

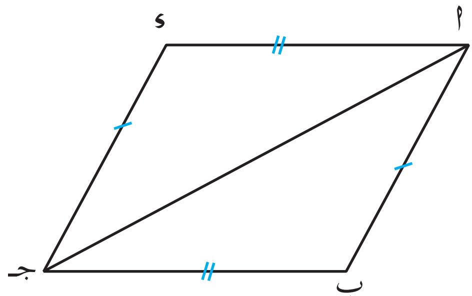
[١] في الأشكال (٥–٨٧ : أ ، ب ، جـ ، ء) : سمّ مثلثين متطابقين مع ذكر السبب .



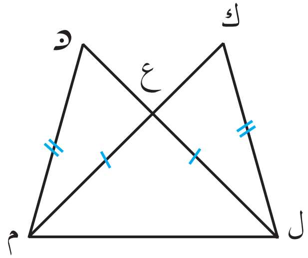
شكل (٥ –٨٧ أ)



شكل (٥ –٨٧ ب)



شكل (٥ –٨٧ جـ)



شكل (٥ –٨٧ ء)

[٢] في المعين أ ب جـ ء . أثبت أن :

ق (∢ جـ أ ء) = ق (∢ أ جـ ء) .

[٣] في متوازي الأضلاع أ ب جـ ء ، إذا كانت النقطة « س » تنصف $\overline{\text{أء}}$ والنقطة « ص » تنصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ، فأثبت أن :

ΔΔ أ ب ص ، جـ ء س متطابقان .

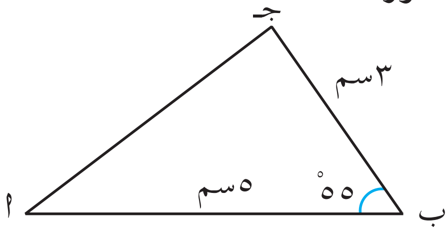
الحالة الثانية : تطابق ضلعين والزاوية المحصورة :

(١) ارسم المثلث أ ب جـ الذي فيه :

|أ ب| = ٥سم ، |ب جـ| = ٣سم ،

ق (∡ ب) = ٥٥°

[انظر الشكل (٥–٨٨ أ)]



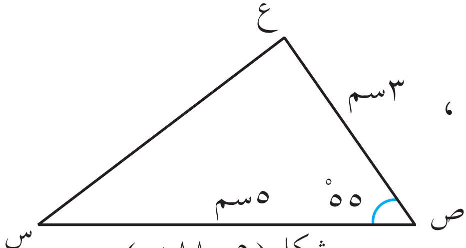
شكل (٥ –٨٨ أ)

(٢) ارسم المثلث س ص ع الذي فيه :

|س ص|=٥سم ، |ص ع|=٣سم ،

ق (∡ ص) = ٥٥°

[انظر الشكل (٥–٨٨ب)]



شكل (٥ –٨٨ ب)

(٣) انقل أحد المثلثين وطبقه على الآخر . ماذا تلاحظ ؟

ستلاحظ أن ΔΔ يتطابقان .

(٤) استخدم المسطرة لقياس طول $\overline{\text{أ جـ}}$ ، وكذلك طول $\overline{\text{س ع}}$

استخدم المنقلة لقياس ∡أ ، ∡ جـ ، ∡ س ، ∡ ع

ماذا تلاحظ ؟

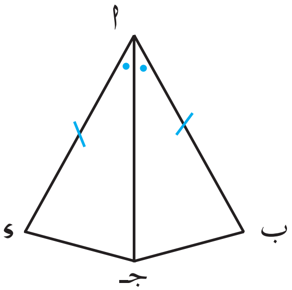
ستلاحظ أن : (١) |أ جـ| = |س ع| .

(٢) ق(∡أ) = ق (∡ س) ، ق (∡ جـ) = ق (∡ ع) .

أي أن الأضلاع المتناظرة متطابقة ، وكذلك الزوايا المتناظرة متطابقة .

ينطبق المثلثان كل منهما على الآخر تمام الانطباق إذا تطابق زوجان من الأضلاع المتناظرة والزاوية المحصورة بينهما ، ونرمز لهذه الحالة بالرمز (ض ز ض)

مثال (١)



شكل (٥ – ٨٩)

من الشكل (٥–٨٩) أثبت أن :

(١) ق (∡ ب) = ق (∡ ء) ،

(٢) | ب جـ | = | جـ ء |

المعطيات :

من الشكل (٥–٨٩):

| أ ب | = | أ ء | ، ق (∡ ب أ جـ) = ق (∡ ء أ جـ)

المطلوب : إثبات أن :

(١) ق (∡ ب) = ق (∡ ء) (٢) | ب جـ | = | جـ ء |

البرهان :

ΔΔ أ ب جـ ، أ ء جـ فيهما:

| أ ب | = | أ ء | معطى

ق (∡ ب أ جـ) = ق (∡ ء أ جـ) معطى

$\overline{\text{أ جـ}}$ ضلع مشترك

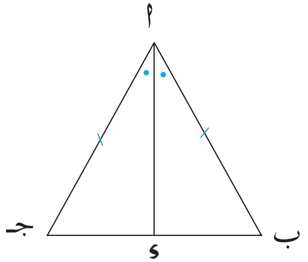
∴ ينطبق المثلثان وينتج أن :

(١) ق (∡ ب) = ق (∡ ء)

(٢) | ب جـ | = | ء جـ | وهو المطلوب

تمرين مشهور

« منصف زاوية الرأس في المثلث المتساوي الساقين ينصف القاعدة ويكون عمودياً عليها » .



شكل (٥ – ٩٠)

المعطيات :

∆ أ ب جـ فيه : |أ ب| = |أ جـ| ،

أء ينصف ∡ أ ، ويقطع ب جـ

في النقطة « ء »

المطلوب : إثبات أن :

(١) |ب ء| = |ء جـ|

(٢) أء ⊥ ب جـ

البرهان:

∆∆ أ ب ء ، أ جـ ء فيهما :

|أ ب| = |أ جـ|	معطى
ق (∡ ب أ ء) = ق (∡ جـ أ ء)	معطى
أء	ضلع مشترك

∴ ينطبق ∆∆ (ض . ز . ض) وينتج أن :

(١) |ب ء| = |ء جـ| وهو المطلوب أولاً

(٢) ق (∡ أ ء ب) = ق (∡ أ ء جـ)

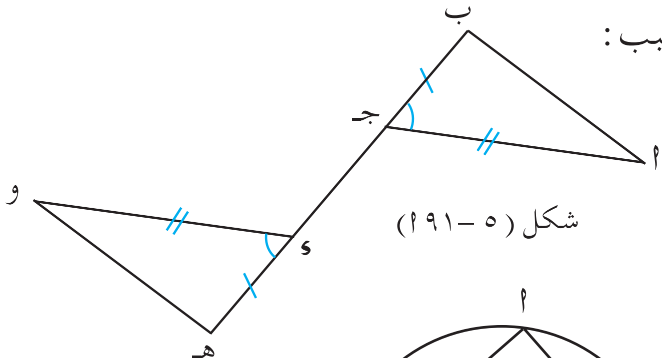
ولكن ق (∡ أ ء ب) + ق (∡ أ ء جـ) = ١٨٠° متكاملتان ،

∴ ق (∡ أ ء ب) = ق (∡ أ ء جـ) = ١٨٠° / ٢ = ٩٠°

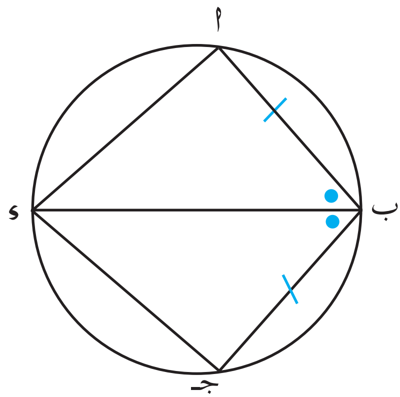
أي أن : أء ⊥ ب جـ وهو المطلوب ثانياً .

تمارين ومسائـل

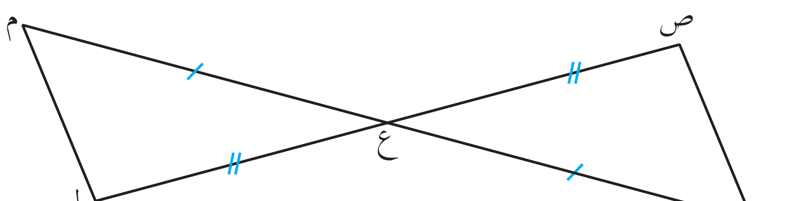
[١] حدد في كل من الأشكال (٥–٩١ أ ، ب ، جـ) المثلثين المتطابقين مع ذكر السبب :



شكل (٥ – ٩١ أ)



شكل (٥ – ٩١ ب)



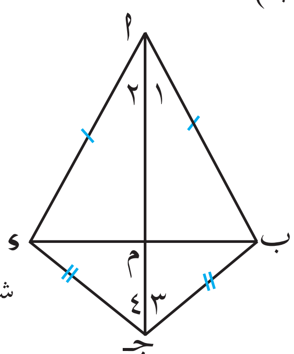
شكل (٥ – ٩١ جـ)

[٢] في الشكل (٥–٩٢) أثبت أن :

(أ) ق (∡ ١) = ق (∡ ٢)

(ب) ق (∡ ٣) = ق (∡ ٤)

(جـ) $\overline{\text{أم}} \perp \overline{\text{ب ء}}$



شكل (٥ – ٩٢)

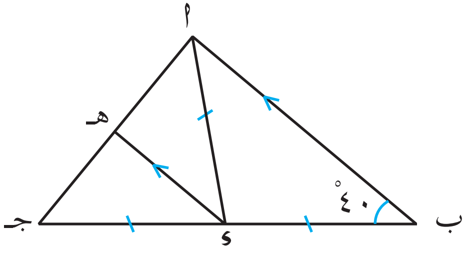
[٣] في الشكل (٥ –٩٣)

|ب ء| = |جـ ء| = |أ ء|

$\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{هـ ء}}$ ، ق (∡ ب) = ٤٠°

المطلوب : إِثبات أن :

النقطة هـ تنصف $\overline{\text{أ جـ}}$



شكل (٥ –٩٣)

[٤] أ ب جـ ء مستطيل ، م نقطة تنصف $\overline{\text{ب جـ}}$

المطلوب : إِثبات أن : Δ أ م ء متساوي الساقين .

[٥] المثلث أ ب جـ متساوي الأضلاع . فيه $\overline{\text{أ ء}}$ ينصف ∡ أ ويقطع $\overline{\text{ب جـ}}$

في النقطة « ء » ، مد $\overline{\text{أ ء}}$ إِلى النقطة « هـ »

بحيث |أ ء| = |هـ ء|

المطلوب : إِثبات أن :

ΔΔ أ ء جـ ، هـ ء جـ متطابقان .

الحالة الثالثة : تطابق زاويتين وضلع :

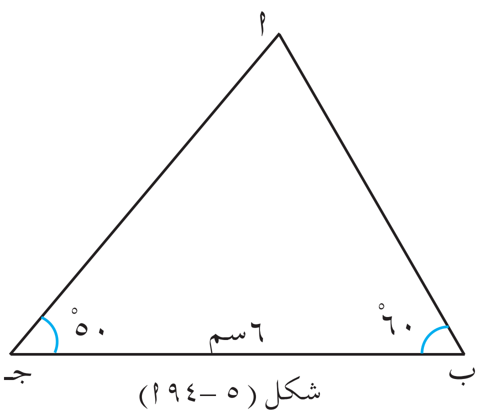
نشــــاط

(١) ارسم المثلث أ ب جـ الذي فيه :

|ب جـ| = ٦ سم ، ق (∡ب)= ٦٠° ،

ق (∡ جـ) = ٥٠° ،

[انظر الشكل (٥–١٩٤)]



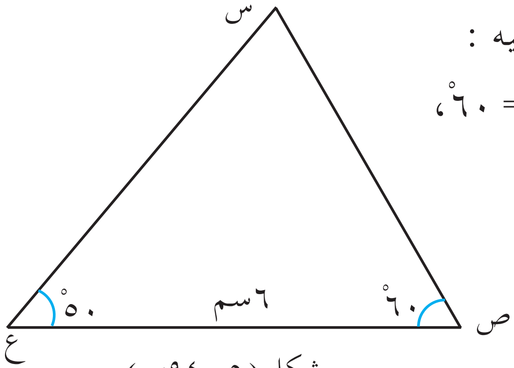
شكل (٥ –١٩٤)

(٢) ارسم المثلث س ص ع الذي فيه :

|ص ع|=٦سم ، ق (∢ ص) = ٦٠°،

ق (∢ ع) = ٥٠° ،

[انظر الشكل (٥-٩٤ب)]



شكل (٥ -٩٤ب)

(٣) انقل أحد المثلثين على ورقة شفافة وطبقه على المثلث الآخر ماذا تلاحظ؟

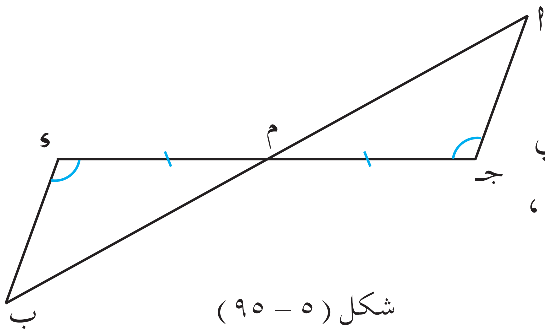
ستلاحظ أن ΔΔ يتطابقان ، وأن :

|أ ب|=|س ص| ، |أ جـ|=|س ع| ، ق (∢ أ) = ق (∢ س) .

أي أن الأضلاع المتناظرة في المثلثين متطابقة وكذلك الزوايا المتناظرة فيهما متطابقة .

ينطبق المثلثان كل على الآخر إذا تطابق في أحدهما ضلع وزاويتان نظائرها في المثلث الآخر. ونرمز لهذه الحالة بالرمز (ز ض ز) .

مثــــال



شكل (٥ – ٩٥)

$\overline{أب}$ ، $\overline{جـ د}$ متقاطعان في نقطة « م » ، م منتصف $\overline{جـ د}$ ،

ق (∢ جـ) = ق (∢ د)

أثبت أن :

|أ م|=|ب م| .

المعطيات : | جـ م | = | م ء | ، ق (∡ جـ) = ق (∡ ء) .

المطلوب : إثبات أن : | ا م | = | ب م |

البرهان :

$\Delta\Delta$ ا جـ م ، ب ء م فيهما : ،

ق (∡ جـ) = ق (∡ ء) (معطى)

ق (∡ ا م جـ) = ق (∡ ب م ء) ... لماذا ؟

| جـ م | = | ء م | (معطى)

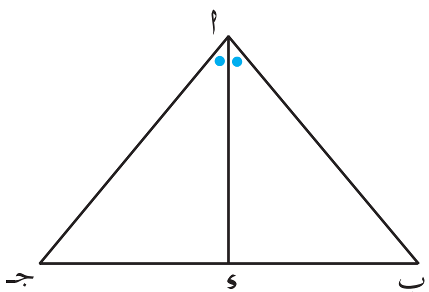
∴ ينطبق المثلثان (ز ض ز) وينتج أن : | ا م | = | ب م | ،

تمرين مشهور

« إذا تساوت في مثلث زاويتان فإن الضلعين المقابلين لهما يكونان متطابقين »

المعطيات : في الشكل (٥–٩٦) :

ق (∡ ب) = ق (∡ جـ)



شكل (٥ –٩٦)

المطلوب : إثبات أن : | ا ب | = | ا جـ |

العمــل : ننصف زاوية ا بالمنصف $\overline{\text{ا ء}}$

الذي يلاقي القاعدة $\overline{\text{ب جـ}}$ في ء.

البرهان :

$\Delta\Delta$ ا ب ء ، ا جـ ء فيهما :

ق (∡ ب ا ء) = ق (∡ جـ ا ء) عملاً

ق (∡ ب) = ق (∡ جـ) معطى

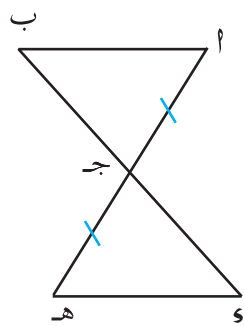
$\overline{\text{ا ء}}$ ضلع مشترك .

∴ ينطبق المثلثان (ز ض ز) وينتج أن :

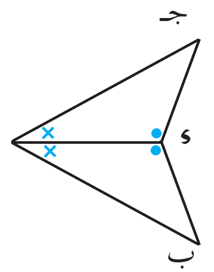
$|$ أ ب $|$ = $|$ أ جـ $|$ وهو المطلوب

تمارين ومسائـل

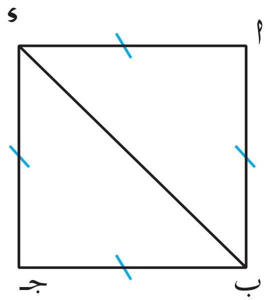
[١] حدّد المثلثات المتطابقة في كل من الأشكال (٥–٩٧ أ ، ب ، جـ ، ء) ، ثم اذكر السبب :



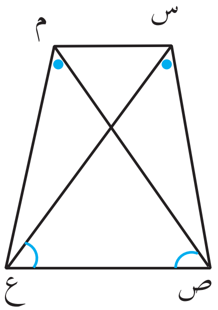
شكل (٥ –٩٧ أ)



شكل (٥ –٩٧ ب)



شكل (٥ –٩٧ جـ)

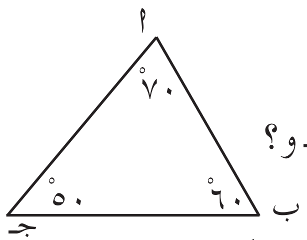


شكل (٥ –٩٧ء)

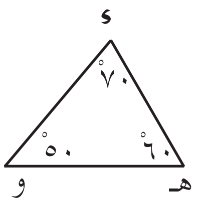
[٢] في الشكل (٥–٩٨ أ ، ب) :

هل يتطابق $\Delta\Delta$ أ ب جـ ، ء هـ و؟

اذكر السبب .



شكل (٥ –٩٨ أ)



شكل (٥ –٩٨ ب)

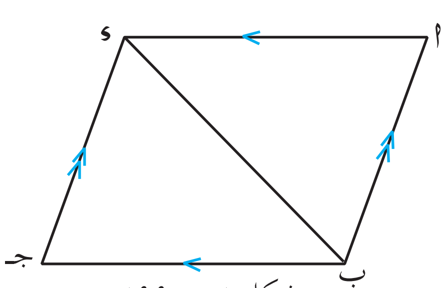
[٣] في الشكل (٥–٩٩) :

$\overline{\text{ب أ}}$ // $\overline{\text{جـ ء}}$

$\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

أثبت أن : $|$ أ ب $|$ = $|$ ء جـ $|$

$|$ أ ء $|$ = $|$ ب جـ $|$



شكل (٥ – ٩٩)

[٤] في الشكل (٥–١٠٠) :

| أ ب | = ٤سم ، | ء جـ | = ٢,٥سم

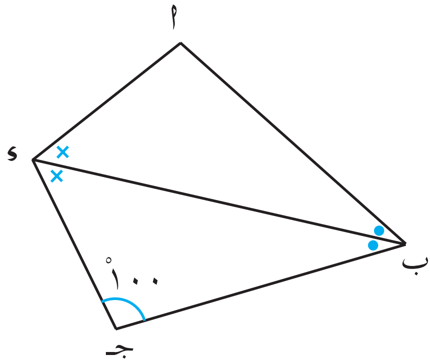
ق (∡ جـ) = ١٠٠°

$\overline{\text{ب ء}}$ ينصف كلاً من ∡ أ ب جـ ،

∡ أ ء جـ

أوجد :

| ب جـ | ، | أ ء | ، ق (∡ أ) .

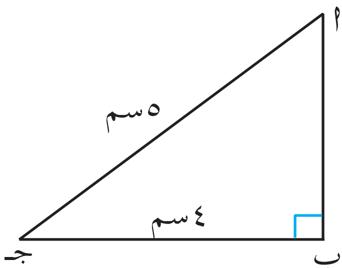


شكل (٥ – ١٠٠)

الحالة الرابعة : تطابق وتر وضلع في مثلث قائم الزاوية :

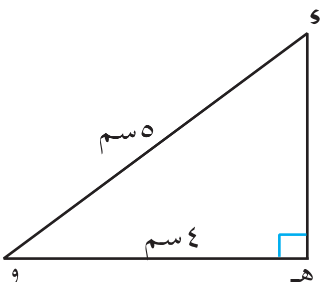
نشـاط

(١) ارسم المثلث أ ب جـ القائم الزاوية في ب ، | أ جـ | = ٥سم ، | ب جـ | = ٤سم ، [انظر الشكل (٥–١٠١)]



شكل (٥ – ١٠١)

(٢) ارسم المثلث ء هـ و القائم الزاوية في هـ ، | ء و | = ٥سم ، | هـ و | = ٤سم ، [انظر الشكل (٥–١٠٢)]



شكل (٥ – ١٠٢)

(٣) انقل أحد المثلثين على ورقة شفافة وطبقه على المثلث الآخر ، ماذا تلاحظ؟

ستلاحظ أن : ΔΔ يتطابقان ، وأن

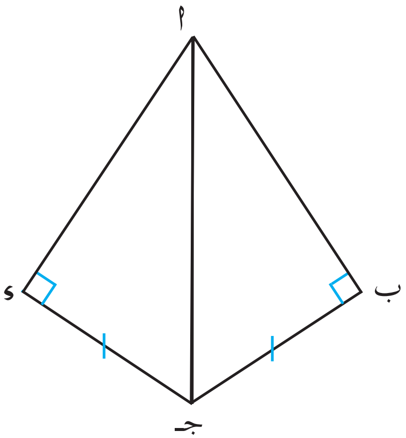
| أ ب | = | ء هـ | ،

ق (∡ أ) = ق (∡ ء) ، ق (∡ جـ) = ق (∡ و)

أي أن الأضلاع المتناظرة في المثلثين ا ب جـ ، ء هـ و متطابقة وكذلك الزوايا المتناظرة متطابقة .

ينطبق المثلثان القائما الزاوية إذا طابق في أحدهما الوتر وضلع نظيريهما في المثلث الآخر . ونرمز لهذه الحالة بالرمز (ق و ض) .

مثال (١)



شكل (٥ – ١٠٣)

في الشكل (٥–١٠٣)

أثبت أن : $\overline{\text{ا جـ}}$ ينصف ∢ ب ا ء

المعطيات :

| ب جـ | = | ء جـ | .

ق (∢ ب) = ق (∢ ء) = ٩٠°

المطلوب : إثبات أن :

$\overline{\text{ا جـ}}$ ينصف ∢ ب ا ء

البرهان : ΔΔ ا ب جـ ، ا ء جـ فيهما :

ق (∢ ب) = ق (∢ ء) = ق   (معطى)

الوتر ا جـ مشترك

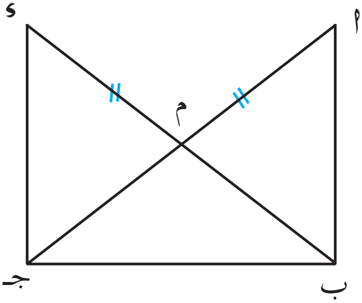
| ب جـ | = | ء جـ | (معطى)

∴ ينطبق المثلثان القائما الزاوية (ق و ض) وينتج أن :

ق (∢ ب ا جـ) = ق (∢ ء ا جـ)

أي أن $\overline{\text{ا جـ}}$ ينصف ∢ ب ا ء   وهو المطلوب

مثال (٢)



شكل (٥ – ١٠٤)

في الشكل (٥–١٠٤)

$\overline{\text{أ ب}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{ء جـ}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ ،

$|\text{أ جـ}| = |\text{ء ب}|$ ، أثبت أن :

(١) المثلثين أ ب جـ ، ء جـ ب متطابقان .

(٢) Δ م ب جـ متساوي الساقين .

المعطيات :

$\overline{\text{أ ب}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{ء جـ}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ ، $|\text{أ جـ}| = |\text{ء ب}|$.

المطلوب : إثبات أن : (١) Δ أ ب جـ $\cong$ Δ ء ب جـ

(٢) $|\text{م ب}| = |\text{م جـ}|$

البرهان : $\Delta\Delta$ أ ب جـ ، ء جـ ب فيهما :

ق ($\measuredangle$ أ ب جـ) = ق ($\measuredangle$ ء جـ ب) = ق ، لماذا ؟

$|\text{أ جـ}| = |\text{ء ب}|$ (معطى)

$\overline{\text{ب جـ}}$ ضلع مشترك

$\therefore$ ينطبق المثلثان القائما الزاوية (ق و ض) وهو المطلوب أولاً ،

ينتج من تطابق المثلثين أ ب جـ ، ء جـ ب أن :

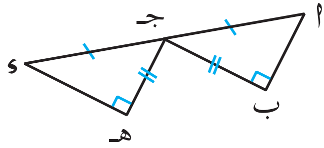
ق ($\measuredangle$ م ب جـ) = ق ($\measuredangle$ م جـ ب)

$\therefore$ $|\text{م ب}| = |\text{م جـ}|$ تمرين مشهور

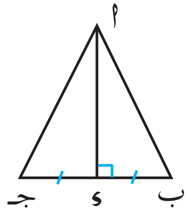
ومنه يكون Δ م ب جـ متساوي الساقين وهو المطلوب ثانياً .

تمارين ومسائل

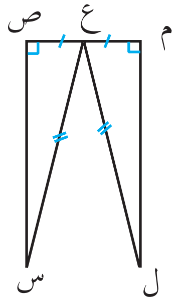
[١] حدّد المثلثات المتطابقة في كل من الأشكال (٥–١٠٥ أ ، ب ، جـ ، ء) واذكر السبب :



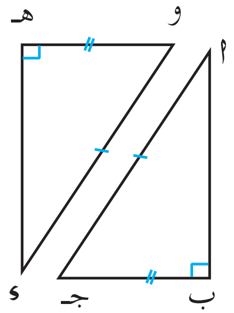
شكل (٥ – ١٠٥أ)



شكل (٥ – ١٠٥ب)



شكل (٥ – ١٠٥جـ)



شكل (٥ – ١٠٥ء)

[٢] في الشكل (٥–١٠٦) :

| ء جـ | = ٣سم ، | أ ء | = | ب جـ |،

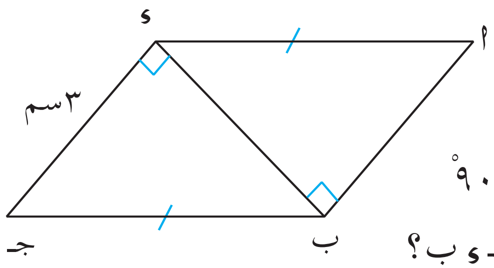
ق (∡ أ ء ب) = ٣٨°

ق(∡ أ ب ء)= ق(∡ ب ء جـ)= ٩٠°

المطلوب: (١) هل Δ أ ب ء ≅ Δ جـ ء ب؟

اذكر السبب .

(٢) أوجد| أ ب |، ق(∡ء جـ ب) .



شكل (٥ – ١٠٦)

[٣] في الشكل (٥–١٠٧) :

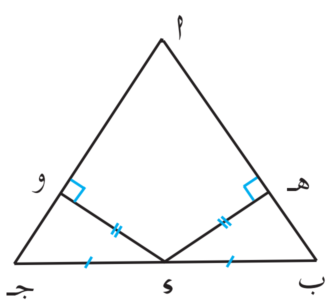
ء نقطة تنصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ،

$\overline{\text{ء هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ء و}}$ ⊥ $\overline{\text{أ جـ}}$ ،

فإذا كان : | ء هـ | = | ء و |

(١) أثبت أن : ق (∡ ب) = ق (∡ جـ)

(٢) ما نوع المثلث أ ب جـ ؟



شكل (٥ – ١٠٧)

[٤] في الشكلين (٥–١٠٨أ ، ب) :

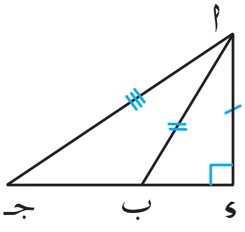
أء ⊥ ءجـ ، س م ⊥ م ع

فإذا كان : | أ ب | = | س ص | ،

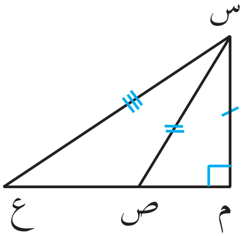
| أ جـ | = | س ع |، | أ ء | = | س م |

أثبت أن :

Δ أ ب جـ ≅ Δ س ص ع



شكل (٥ –١٠٨أ)



شكل (٥ –١٠٨ب)

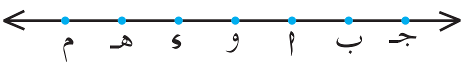
٥ : ٨ نظـــام الإحداثيـــات

نظام الإحداثيات على خـــط مستقيم :

نشـــاط (١)

ارسم مستقيماً فـــي كراستـــك

[انظر الشكل (٥ – ١٠٩)]



شكل (٥ – ١٠٩)

– حدد نقطة على هذا المستقيم لتكن (و) .

– حدد النقاط : أ ، ب ، جـ على يمين (و) بحيث | أ و | = ١سم ، | و ب | = ٢سم ، | و جـ | = ٣سم

– حدد على يســـار (و) النقاط : ء ، هـ ، م بحيث | و ء | = ١سم ، | و هـ | = ٢سم ، | و م | = ٣سم .

– إذا كانت النقطة (و) تمثل العدد صفر ، فإن النقطة (أ) تمثل العدد (١) .

ما الأعداد التي تمثلها النقطتان ب ، جـ ؟

ما الأعداد التي تمثلها النقاط ء ، هـ ، م ؟

مما سبق تلاحظ أن المستقيم المرسوم هو خط الأعداد وأن النقاط التي تقع على يمين النقطة (و) تمثل الأعداد الموجبة وأن النقاط على يسار (و) تمثل الأعداد السالبة ونكون في هذه الحالة قد مثلنا نظاماً إحداثياً على الخط المستقيم وتسمى النقطة التي تمثل العدد صفر نقطة الأصل (مبدأ الإحداثيات)، ويسمى العدد التي تمثله أي نقطة بإحداثي تلك النقطة .

عندما نعين نقطتين مثل و، ﺃ على خط مستقيم تمثلان العددين صفر، ١ على الترتيب ، فإننا نكون قد عرفنا نظاماً إحداثياً على الخط المستقيم .

نشاط (٢)

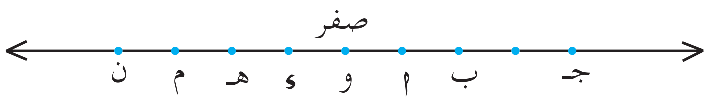
عرّف نظاماً إحداثياً على خط مستقيم بحيث تمثل النقطة (و) العدد صفر وتمثل النقطة (ﺃ) العدد (١) .

– حدّد على هذا النظام إحداثي النقطتين ب ، جـ على يمين النقطة (و) والنقاط ء ، هـ ، م ، ن على يسار النقطة و . إذا علمت أن :

| و ب | = ٢ ، | و ﺃ | = | ب جـ | ،

| و ء | = | ء هـ | = | هـ م | = | م ن | = | و ﺃ |

انظر الشكل (٥–١١٠) ، ماذا تلاحظ ؟



شكل (٥ – ١١٠)

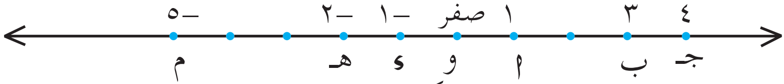
– تلاحظ أن إحداثي النقطة ب هو (٢) وإحداثي النقطة ء هو (–١) ما إحداثي كل من النقاط : جـ ، هـ ، م ، ن ؟

مثـــال

ارسم خطاً مستقيماً ، وحدّد عليه النقطة (و) التي تمثل العدد (صفر)

ثم حدد عليه النقاط ٱ ، ب ، جـ ، ء ، هـ ، م بحيث تمثل الأعداد ١ ، ٣ ، ٤ ، –١ ، –٢ ، –٥ على الترتيب .

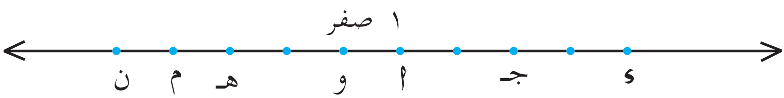
الحـــل : الشكل (٥–١١١) هو الشكل المطلوب .



شكل (٥ –١١١)

تمارين ومسائــل

[١] في الشكل (٥ – ١١٢) حدد إِحداثي النقاط : جـ ، ء، هـ ، م ، ن



شكل (٥ –١١٢)

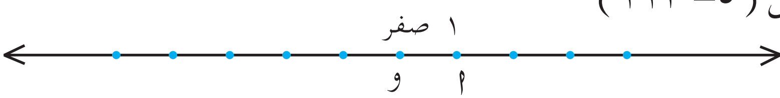
[٢] ارسم خطاً مستقيماً، ثم حدد عليه النقطة (و) التي تمثل العدد صفر .

حدد على هذا المستقيم النقاط : ٱ ،ب،جـ على يمين (و)

والنقاط : ء ، هـ ، م على يسار و بحيث يكون : | و ٱ | = ١ سم | و ب | = ٣سم،

| ب جـ | = ٢سم، | و ء | = ٢ سم ، | ء هـ | = | هـ م | = ١,٥ سم

[٣] في الشكل (٥– ١١٣)



شكل (٥ –١١٣)

حدد النقاط :

ب ، جـ ، ء ، هـ ،ل، إِذا علمت أن : | وب | = ٣ | و ٱ | ، | ب جـ | = | ٱ جـ |

| و هـ | = | و ب | ، | و ل | = ٤ | و ٱ | حيث ب ، جـ تقع على يمين (و)

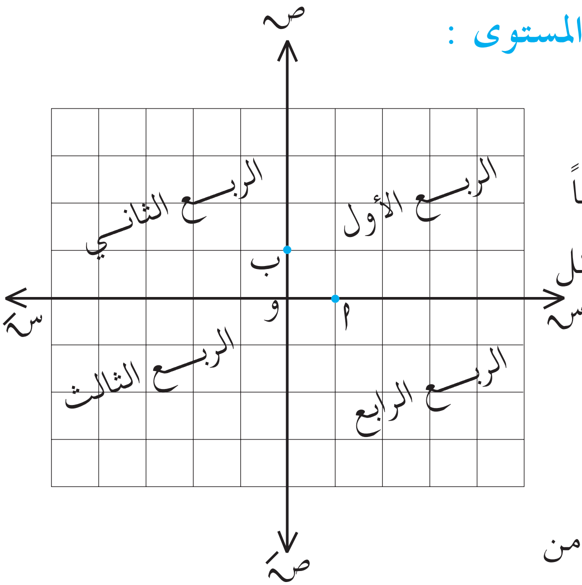
وتقع هـ ، ل على يسار (و) .

[٤] عرف نظاماً إِحداثياً على خط مستقيم ، ثم حدّد في هذا النظام النقاط (ب ، جـ ، ء ، هـ) التي تمثل الأعداد ٣ ، –٤ ، ٥ ، –٦ على الترتيب .

نظام الإِحداثيات المتعامدة في المستوى :

نشـــاط (١)

ارسم على ورقة رسماً بيانياً $\overleftrightarrow{\text{س س}َ} \perp \overleftrightarrow{\text{ص ص}َ}$ [انظر الشكل (٥ – ١١٤)] ،



شكل (٥ –١١٤)

– ســـم نقطة التقاطـــع لـ $\overleftrightarrow{\text{س س}َ}$، $\overleftrightarrow{\text{ص ص}َ}$ بـ و

– حدد نظاماً إِحداثياً على كل من $\overleftrightarrow{\text{س س}َ}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ص ص}َ}$ بحيث تكون نقطة الوحدة على $\overleftrightarrow{\text{س س}َ}$ هي ا ونقطة الوحدة على $\overleftrightarrow{\text{ص ص}َ}$ هي ب

– يسمى $\overleftrightarrow{\text{س س}َ}$ بالمحور السيني ويسمى $\overleftrightarrow{\text{ص ص}َ}$ بالمحور الصادي .

– النقاط على محور السينات على يمين النقطة (و) تمثل أعداداً موجبة ولذلك يسمى $\overleftarrow{\text{و س}}$ الاتجاه الموجب لمحور السينات .

لماذا يسمى $\overleftarrow{\text{و س}َ}$ الإِتجاه السالب لمحور السينات ؟

لماذا يسمى $\overleftarrow{\text{و ص}}$ الإِتجاه الموجب لمحور الصادات ؟

لماذا يسمى $\overleftarrow{\text{و ص}َ}$ الإِتجاه السالب لمحور الصادات ؟

– كل نقطة على محور السينات تمثل عدداً يسمى الإِحداثي السيني لهذه النقطة .

وكل نقطة على محور الصادات تمثل عدداً يسمى الإِحداثي الصادي لهذه النقطة .

– المحوران الإِحداثيان يقسمان المستوى الإِحداثي إِلى أربعة أرباع [انظر الشكل (٥–١١٤)] لاحظ أن إِحداثيي كل نقطة تقع في الربع الأول أعداد موجبة .

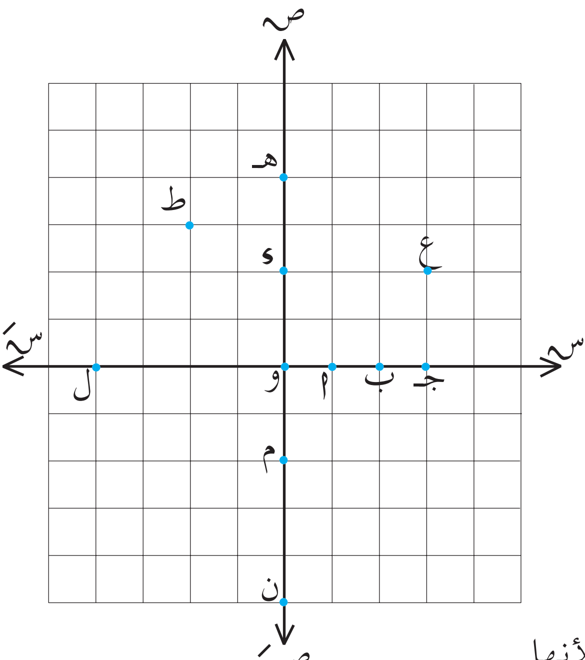
ما إِشارة كل من إِحداثيي نقطة تقع في الربع الثاني ؟

ما إِشارة كل من إِحداثيي نقطة تقع في الربع الثالث ؟

ما إِشارة كل من إِحداثيي كل نقطة تقع في الربع الرابع ؟

نشــاط (٢)

فــي الشكل (٥ – ١١٥) لاحظ أن بعد النقطة ب عن محــور الصــادات ٢ وحــدات فيكــون إِحداثيهــا السينــي ٢ ، كمــا نجد بعــد النقطــة هـ عن محور السينات ٤ وحدات فيكــون إِحداثيهــا الصادي ٤ ، وتجد بعد النقطة ط عن محور الصادات ٢ وحدات من اليسار فيكون إِحداثيها السيني (–٢) لأنها تقع في الاتجاه السالب لمحور السينات ،



شكل (٥ –١١٥)

كما تجد بعد هذه النقطة ٣ وحدات عن محور السينات إلى الأعلى فيكون إحداثيها الصادي (٣) .

ما الإحداثي السيني لكل من النقطتين جـ ، ل ؟

ما الإحداثي الصادي لكل من النقاط ء ، م ، ن ؟

ما الإحداثي السيني للنقطة ع ؟ وما إحداثيها الصادي ؟

كل نقطة في المستوى الإحداثي لها إحداثيان أحدهما يسمى الإحداثي السيني والآخر يسمى الإحداثي الصادي وقد اصطلح على أن نكتب الإحداثيين لكل نقطة على صورة زوج مرتب ، بحيث نكتب الإحداثي السيني أولاً ثم نكتب الإحداثي الصادي (س ، ص) .

ملاحظـات :

(١) أي نقطة تقع على محور السينات إحداثيها الصادي صفر وأي نقطة تقع على محور الصادات إحداثيها السيني صفر .

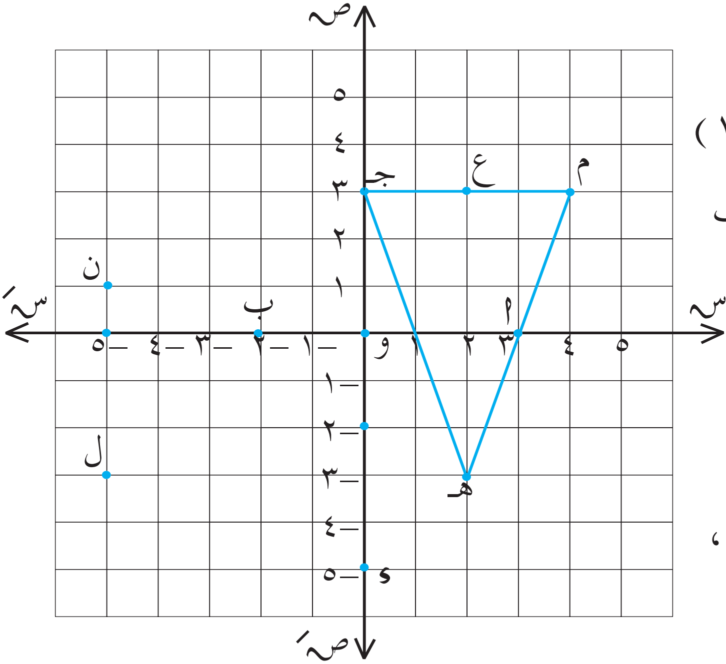
(٢) أي نقطة تقع في الربع الأول يكون كل من إحداثيها السيني والصادي موجباً ، وأي نقطة تقع في الربع الثاني إحداثيها السيني سالب والصادي موجب ، وأي نقطة تقع في الربع الثالث يكون كل من إحداثيها السيني والصادي سالباً ، وأي نقطة تقع في الربع الرابع يكون إحداثيها السيني موجباً وإحداثيها الصادي سالباً .

مثال (١)

مثل النقاط الآتية في المستوى الإحداثي أ(٣ ، ٠)، و(٠ ، ٠) ، ب(−٢ ، ٠)،

جـ (٠ ، ٣) ، ء (٠ ، −٥) ، هـ (٢ ، −٣) ، ل (−٥ ، −٣) ، م (٤ ، ٣)، ن (−٥ ، ١) . ارسم على المستوى الإِحداثي المثلث هـ جـ م ، وبين ما نوعه ؟

الحـــل :



شكل (٥ −١١٦)

الشكل (٥−١١٦) يمثـل النقـاط المطلــوب تحديدها .

لاحظ أن :

ا (٣ ، ٠) تقـــع علـــى المحـــورالسينـــي ،

جـ (٠ ، ٣) تقـــع على المحـــورالصـــادي ،

ولتحديد النقطة (٢ ، −٤) نتحرك في الاتجاه الموجب لمحور السينات وحدتين ونقيم عموداً على محور السينات ثم نتحرك في الاتجاه السالب لمحور الصادات ٤ وحدات . ونقيم عموداً على محور الصادات فتكون نقطة تقاطع العمودين هي النقطة هـ

النقطة م تقع في الربع الأول ، والنقطة ن تقع في الربع الثاني ، والنقطة ل تقع في الربع الثالث ، والنقطة هـ تقع في الربع الرابع .

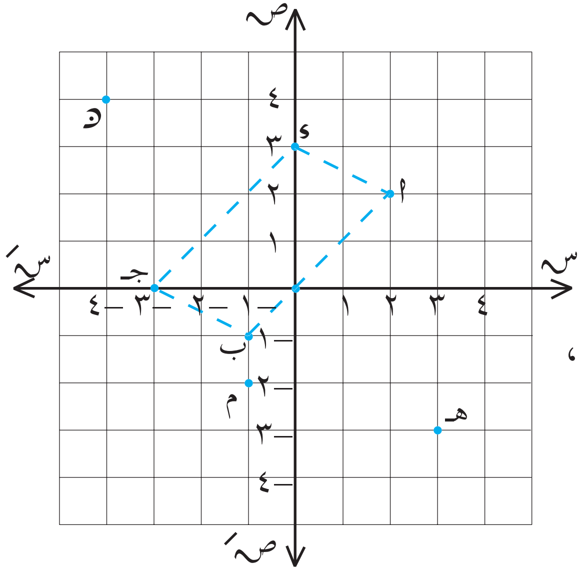
لاحظ أن : $\overline{\text{هـ ع}} \perp \overline{\text{م جـ}}$ وينصفه أي أن المثلث هـ جـ م متساوي الساقين.

مثال (٢)

من الشكل (٥–١١٧)

اكتب إِحداثيات النقاط الموضحة فيه : ا، ب، جـ ، ء ، هـ،م ، ۮ

ثم ارسم الشكل الرباعي ا ب جـ ء، وبين ما نوعه ؟



شكل (٥ –١١٧)

الحل :

ا (٢ ، ٢) ، ب (–١ ، –١) ، جـ (–٣ ، ٠) ، ء (٠ ، ٣) ، هـ (٣ ، –٣) ، م (–١ ، –٢)، ۮ (–٤ ، ٤) ، ولرسم الرباعي نرسم $\overline{\text{ا ب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}}$ ، $\overline{\text{ء ا}}$ ، الشكل الناتج ا ب جـ ء متوازي اضلاع تأكد من ذلك بنفسك باستخدام أدوات القياس .

تمارين ومسائل

[١] على ورق رسم بياني ارسم المستوى الإِحداثي ، ثم حدد عليه النقاط :

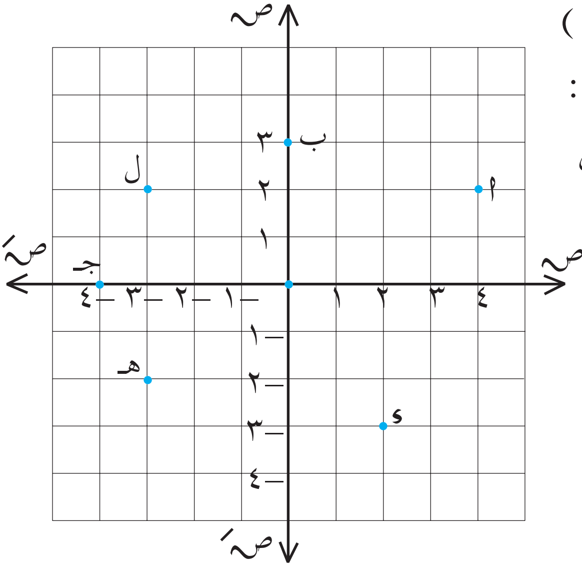
و (٠ ، ٠) ، ا (–٣ ، ٠) ، ب (٥ ، –٢) ، جـ (٥ ، ٢) ، ء (–٥ ، ٢) ، هـ (–٥ ، –٢) ، ل (١ ، ٣) ، م (٠ ، –٢,٥)، ۮ (٢,٥ ، –١) .

[٢] في الشكل (٥ – ١١٨)

اكتب إِحداثيات النقاط :

أ ، ب ، جـ ، ء ، هـ ، ل

على شكل أزواج مرتبة .



شكل (٥ –١١٨)

[٣] ارسم $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{جـء}}$ إِذا كان : أ (٢ ، ٣) ، ب (–١ ، ١) ، جـ (٤ ، –٣) ، ء (–١ ، –٣) .

[٤] ارسم $\overleftrightarrow{\text{ءهـ}}$ و $\overleftrightarrow{\text{من}}$ إِذا كان : ء (٢ ، ٢) ، هـ (٠ ، ٢) ، م (٣ ، ٤) ، ن (٣ ، –١) ثم أجب على الآتي :

– ما علاقة $\overleftrightarrow{\text{ءهـ}}$ بالمحور السيني ؟ وإِذا كانت أ نقطة على $\overleftrightarrow{\text{ءهـ}}$ ما هو إِحداثيها الصادي ؟

– ما علاقة $\overleftrightarrow{\text{من}}$ بالمحور الصادي ؟ وإِذا كانت ب نقطة على $\overleftrightarrow{\text{من}}$ ما هو إِحداثيها السيني ؟

[٥] ارسم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{سس/}}$ ويقطع المحور الصادي في النقطة (٠ ، –٣)، ما الإِحداثي الصادي لأي نقطة تقع على $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ؟

[٦] ارسم $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ص ص}^-}$ ويقطع المحور السيني في النقطة (٢ ، ٠) ما هو الإحداثي السيني لأي نقطة تقع على $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ ؟

[٧] لتكن ٱ (٥ ، ١) ، ب (–٣ ، ١) ، جـ (١ ، ٥) ارسم Δ ٱ ب جـ ، وحدد نقطة المنتصف لـ $\overline{\text{ٱ ب}}$ ولتكن ء ، ثم أجب على الآتي :

– ما علاقة $\overleftarrow{\text{ٱ ب}}$ بالمحورين الإِحداثيين ؟

– ما علاقة $\overleftarrow{\text{جـ ء}}$ بالمحورين الإِحداثيين ؟

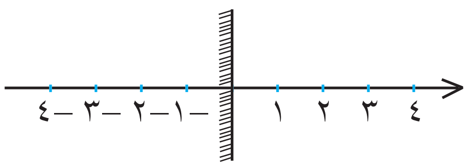
– احسب مساحة Δ ٱ ب جـ .

٥ : ٨ الانـعكـاس

الانعكاس في المحورين الإِحداثيين :

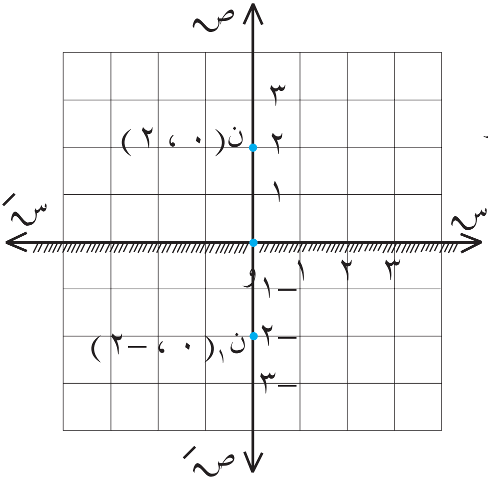
إِذا وضعت مرآة مستوية أمامك ، وتأملت فيها تلاحظ صورتك فيقال بأن صورتك نتجت عن انعكاس في سطح المرآة فيكون بعدك عن المرآة يساوي بعد صورتك عن المرآة .

إِذا كان لدينا خط الأعداد ووضعنا مرآة عليه عند نقطة الأصل (و) بحيث يكون سطح المرآة عمـوديًا على خـط الأعداد كما في الشكل (٥ – ١١٩) نلاحظ أن صورة العدد (١) هي (–١) أي أن صورة العدد (١) بالانعكاس في النقطة (٠) هي (–١) . فما صورة الأعداد ٢ ، ٤ ، –٤ ، –٥ بهذا الأنعكاس ؟



شكل (٥ –١١٩)

نشـــاط (١)

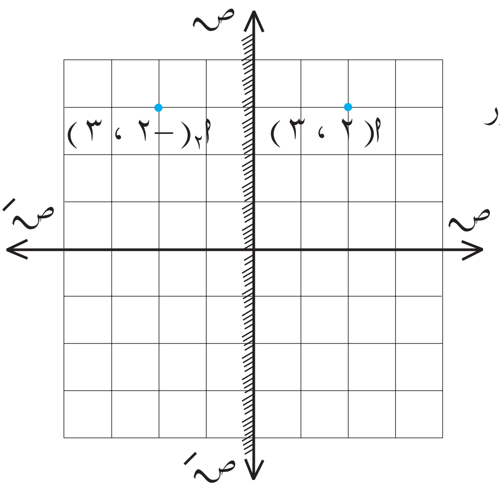


شكل (٥ –١٢٠)

ضع مرآة مستوية منطبقة على محور السينات ما صورة النقطة ن(٠ ، ٢)؟ نحدد بُعد ن عن محور السينات فنجد هذا البعد وحدتين فتكون صورة النقطة ن١ في الجهة الأخرى للمرآة تبعد وحدتين ، وإذا رمزنا لصورة ن بالرمز ن١ نجد أن ن١ (٠ ، –٢)،

انظر الشكل (٥ – ١٢٠) . حدد صورة النقطة أ (٢ ، ٣) تجد أنها أ١ (٢ ، –٣) وضح ماذا عملت ؟

نشـــاط (٢)



شكل (٥ –١٢١)

ضع مرآة مستوية منطبقة على محور الصادات ما صورة النقطة أ (٢ ،٣) بالأنعكاس في محور الصادات ؟

تجد أن صورة أ هي أ٢ (–٢ ، ٣)

انظر الشكل (٥ – ١٢١) .

- الانعكاس في محور السينات يربط كل نقطة ن (س ، ص) بنقطة ن١ (س ، − ص)

- الانعكاس في محور الصادات يربط كل نقطة ن (س ، ص) بنقطة ن٢(− س ، ص) .

ملاحظة :

كل نقطة ن (س ، ٠) صورتها بالانعكاس في محور السينات نفسها (س ، ٠) وكل نقطة م (٠ ، ص) صورتها بالأنعكاس في محور الصادات نفسها .

مثال (١)

استخدم الانعكاس في محور السينات ، في إِكمال الفراغات التالية :

(١) (٢ ، ٥) ← (،)

(٢) (٣ ، −٤) ← (،)

(٣) (−٥ ، −٢) ← (،)

الحل :

(١) (٢ ، ٥) ← (٢ ، −٥)

(٢) (٣ ، −٤) ← (٣ ، ٤)

(٣) (−٥ ، −٢) ← (−٥ ، ٢)

مثال (٢)

أوجد صورة النقاط أ (٢ ، ٥) ، ب (٣ ، −٤) ، جـ (−٥ ، −٤) بالانعكاس في محور الصادات .

الحل :

أ (٢ ، ٥) ← (−٢ ، ٥)

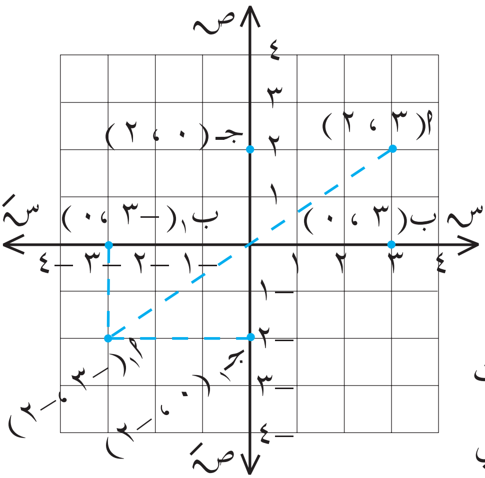
ب (٣ ، −٤) ← (−٣ ، −٤)

جـ (−٥ ، −٤) ← (٥ ، −٤)

الانعكاس في نقطة الأصل :

– في المستوى الإحداثي حدد النقطة أ (٣ ، ٢) ، لاحظ أن الإحداثي السيني لهذه النقطة هو ٣ .

– حدد النقطة ب(٣ ، ٠) وصورتها بالأنعكاس في محور الصادات ب١ (−٣ ، ٠) ، لاحظ أن الإحداثي الصادي للنقطة أ هو ٢ ، حدد النقطة جـ (٠ ، ٢) وصورتها بالانعكاس في



شكل (٥ −١٢٢)

محور السينات جـ١ (٠ ، −٢) ، أقم عموداً من ب١ على محور السينات وعموداً من جـ١ على محور الصادات ثم حدد نقطة تقاطعهما أ١ (−٣ ، −٢) .

تسمى النقطة أ١ (−٣ ، −٢) صورة النقطة أ بالأنعكاس في نقطة الأصل و .

حدد نقاط أخرى لتكن م (–٢ ، ٥) ، ب (٠ ، ٤) ، ع (١ ، –١) ثم حدد صورها بالانعكاس في و

إِذا كانت ن (س ، ص) نقطة في المستوى الإِحداثي ، ما صورتها بالانعكاس في نقطة الأصل (و) ؟ تأكد من ذلك .

مما سبق نستنتج أن :

الانعكاس في نقطة الأصل يربط كل نقطة ن (س ، ص) بنقطة $ن_م$ (– س ، – ص)

مثال (٣)

عيّن صور النقاط أ (٢ ، ٥) ، ب (٣ ، –٤) ، جـ (–٥ ، –٤) بالانعكاس في نقطة الأصل .

الحل :

أ (٢ ، ٥) ⟵ (–٢ ، –٥)   ب (٣ ، –٤) ⟵ (–٣ ، ٤)

جـ (–٥ ، –٤) ⟵ (٥ ، ٤)

تمارين ومسائل

[١] حدد صور النقاط أ (٥ ، ٣) ، ب (–٤ ، ٢) ، جـ (٢ ، –٣) ، ء (٠ ، ٤) ، هـ (٢ ، ٠) بالانعكاس في محور السينات .

[٢] حدد صور النقاط أ (٢ ، ٣)، ب (–٥ ، –٣) ، جـ (١ ، –٥) ، ء (١ ، –١)، هـ (–١ ، ٣)، ل (٠ ، –٤) بالانعكاس في محور الصادات .

[٣] حدد صور النقاط ن$_١$ (٢ ، ٣) ، ن$_٢$ (–٥ ، ١) ، ن$_٣$ (–٣ ، –٤) ، ن$_٤$ (١ ، –٥) ، ن$_٥$ (١ ، ٠) ، ن$_٦$ (–٢ ، ٠) ، ن$_٧$ (٠ ، –٤) ، ن$_٨$ (٠ ، ٥) الانعكاس في نقطة الأصل .

[٤] استخدم الانعكاس (س ، ص) ← (– س ، ص) في إكمال الفراغات الآتية :

أ (٣ ، ٥) ← (،   ) ، ب (–٤ ، –٢) ← (،   )

جـ (،   ) ← (٢ ، –٣) ، ء (،   ) ← (٠ ، ٤)

هـ (٢ ،   ) ← (، ٠) ، ل (، –٣) ← (١ ،   )

ع (–٥ ،   ) ← (، ٥)

[٥] استخدم الانعكاس (س ، ص) ← (س ، – ص) في إكمال الفراغات الآتية :

أ (١ ، ٢) ← (،   ) ، ب (–٦ ، –٤) ← (،   )

جـ (،   ) ← (٠ ، ٦) ، ء (،   ) ← (٠ ، ٤)

هـ (٢ ،   ) ← (، ٠) ، ل (، –٣) ← (١ ،   )

ع (–٥ ،   ) ← (، ٥)

[٦] استخدم الانعكاس (س ، ص) ← (– س ، –ص) في إكمال الفراغات الآتية :

أ (١ ، ٢) ← (،   ) ، ب (١ ، ٥) ← (،   )

جـ (،   ) ← (٦ ، –٤) ، ء (،   ) ← (–١ ، ٣)

هـ (–١ ،   ) ← (، ١) ، ل (، –٦) ← (–٢ ،   )

[٧] أكمل الفراغات الآتية بما يجعل الجمل صحيحة :

أ) (٣ ، –٤) هي صورة (٣ ، ٤) بالانعكاس في . . . . . .

ب) (٣ ، –٤) هي صورة (–٣ ، – ٤) بالانعكاس في . . . . . .

جـ) (٣ ، –٤) هي صورة (–٣ ، ٤) بالانعكاس في . . . . . .

ء) (٠ ، ٣) هي صورة (٠ ، ٣) بالانعكاس . . . . . .

هـ) (–٥ ، ٠) هي صورة (–٥ ، ٠) بالانعكاس . . . . . .

[٨] إذا كانت أ (٢ ، ٤) ، ب (٣ ، –١) ، جـ (–١ ، ٢) ، ء (٢ ، –٤)،

هـ (–٣ ، –١) ، ل (١ ، –٢) ، ع (– ٢ ، ٤) ، م (–٣ ، ١) ،

ن (–١ ، –٢) ، ك (–٢ ، –٤) ، ط (٣ ، ١) ، ظ (١ ، ٢) ،

المطلوب :

– حدد كل نقطتين أحدهما صورة الأخرى بالانعكاس في محور السينات .

– حدد كل نقطتين أحدهما صورة الأخرى بالانعكاس في محور الصادات .

– حدد كل نقطتين أحدهما صورة الأخرى بالانعكاس في نقطة الأصل .

٥ : ١٠ تمارين ومسائل عامة

[١] اذكر نوع كل من الزوايا التالية : ٩٠° ، ٥٠° ، ١٨٠° ، ١٢٥° ، ٢٧٠°

[٢] أ) ما قياس الزاوية المتممة للزاوية التي قياسها ٧٠° ؟

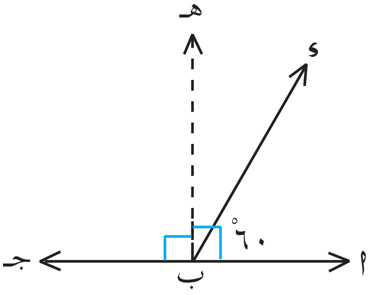
ب) ما قياس الزاوية المكملة للزاوية التي قياسها ٦٠° ؟

جـ) ما قياس الزاوية المتممة والزاوية المكملة للزاوية التي قياسها ٨٠° ؟

[٣] في الشكل (٥ – ١٢٣) :

سمّ المتممة والمكملة للزاوية ا ب ء ،

ثم أوجد قياسيهما .



شكل (٥ –١٢٣)

[٤] في الشكل (٥–١٢٤) :

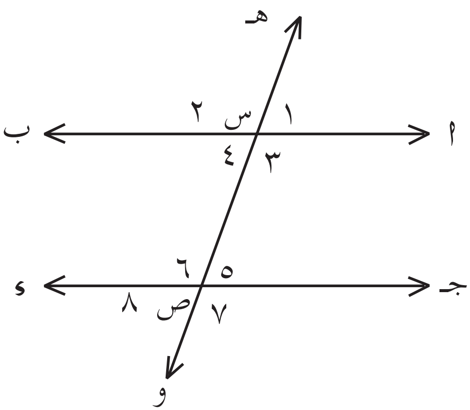
أوجد ما يلي :

ا) زاويتين متبادلتين .

ب) زاويتين متناظرتين .

جـ) زاويتين داخليتين .

ء) ثلاثة أزواج من الزوايا المتقابلة بالرأس .



شكل (٥ –١٢٤)

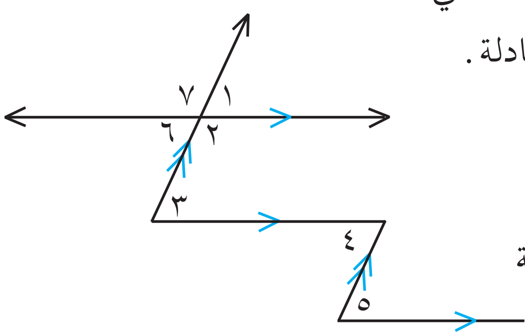
[٥] في الشكل(٥–١٢٥) : أوجد ما يلي :

ا) ثلاثة أزواج من الزوايا المتبادلة.

ب) زاويتين متناظرتين .

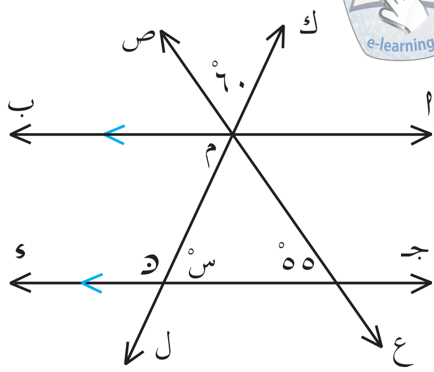
جـ) زاويتين داخليتين .

ء) زوجين من الزوايا المتقابلة بالرأس.

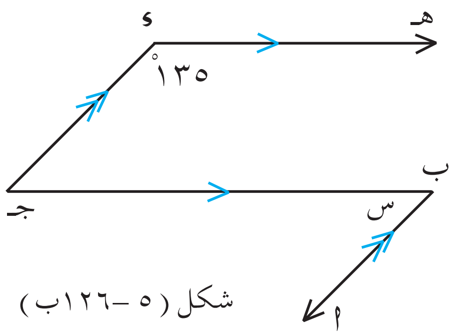


شكل (٥ –١٢٥)

[٦] أوجد قيمة س في كل من الشكلين (٥ – ١٢٦ أ ، ب) .



شكل (٥ –١٢٦أ)



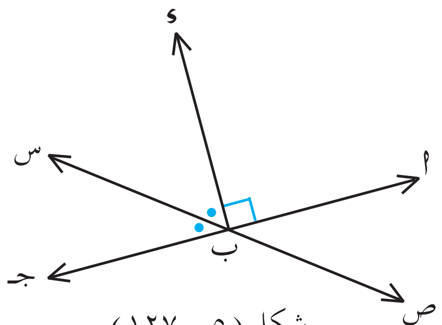
شكل (٥ –١٢٦ب)

[٧] في الشكل (٥ – ١٢٧) :

$\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ يتقاطعان في ب،

$\overrightarrow{\text{ب ء}} \perp \overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ ينصف

∡ ء ب جـ .



شكل (٥ – ١٢٧)

احسب ق (∡ ء ب س) ، ق (∡ س ب جـ) ، وكذلك

ق (∡ ص ب جـ) ، ق (∡ أ ب ص) .

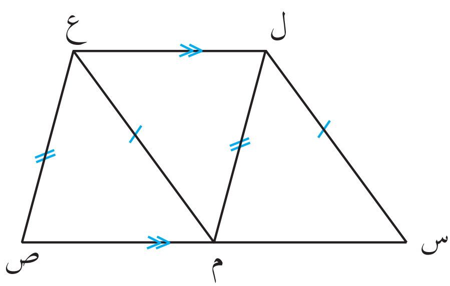
[٨] في الشكل (٥ – ١٢٨) :

النقطة م منتصف $\overline{\text{س ص}}$ ،

|ل س| = |ع م|، |ل م| = |ع ص|،

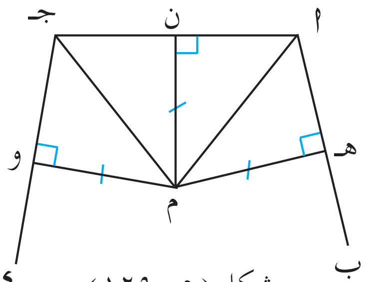
أثبت أن :

ق (∡ س ل م) = ق (∡ ص ع م) .



شكل (٥ – ١٢٨)

[٩] في الشكل (٥ – ١٢٩) :



شكل (٥ – ١٢٩)

$\overline{\text{م هـ}} \perp \overline{\text{ا ب}}$ ، $\overline{\text{م و}} \perp \overline{\text{جـ ء}}$ ،

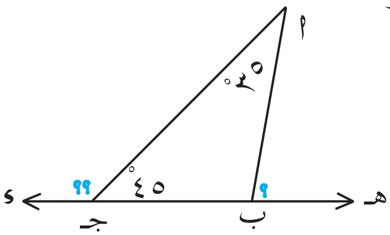
$\overline{\text{م ن}} \perp \overline{\text{ا جـ}}$.

فإذا كان |م هـ| = |م ن| = |م و| أثبت أن :

(ا) |ا هـ| = |ا ن| .

(ب) $\overline{\text{م جـ}}$ ينصف كل من ∢ ء جـ ا ، ∢ ن م و

[١٠] في الشكل (٥ – ١٣٠) :



شكل (٥ – ١٣٠)

احسب ق (∢ ا ب هـ) ،

ق (∢ ا جـ ء)

[١١] حدد النقاط الإحداثية (١ ، ٢)، (٢ ، –١)، (–٣ ، ٠)، (–٤ ، –٢)

في مستوى إحداثي ثم أوجد صور هذه النقاط بالانعكاس :

أولاً : على محور السينات ، ثانياً : على محور الصادات .

ثالثاً : على مبدأ الإحداثيات .

[١٢] في مستوى إحداثي ارسم $\overline{\text{ا ب}}$ حيث ا(٢ ، ٣) ، ب(٢ ، –٣) ،

ارسم صورة $\overline{\text{ا ب}}$ في الانعكاس :

أولاً : في محور السينات ، ثانياً : في محور الصادات ،

ثالثاً : في مبدأ الإحداثيات .

[١٣] في مستوى إحداثي حدد النقطة ا(٣ ، ٤) ثم أوجد صورتها ا$_1$ ، بالانعكاس في محور السينات ثم صورتها ا$_2$ ، بالانعكاس في محور الصادات، ما نوع المثلث ا ا$_1$ ا$_2$ ؟

[١٤] في الشكل (٥–١٣١) إذا كان :

|ب جـ| = |هـ ء| ،

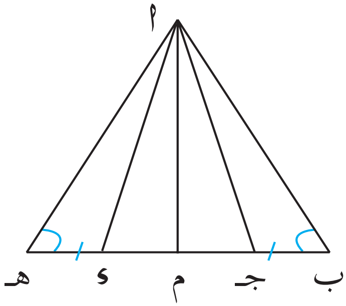
ق (∡ ب) = ق (∡ هـ)

م أ تنصف ∡ جـ أ ء

فأثبت أن :

(١) |أ جـ| = |أ ء|

(٢) |م ب| = |م هـ|



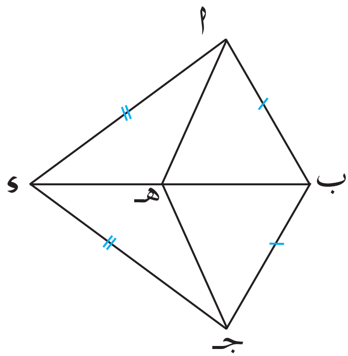
شكل (٥–١٣١)

[١٥] في الشكل (٥–١٣٢)

أثبت أن :

(١) ق (∡ أ هـ ب) = ق (∡ جـ هـ ب)

(٢) |أ هـ| = |هـ جـ|



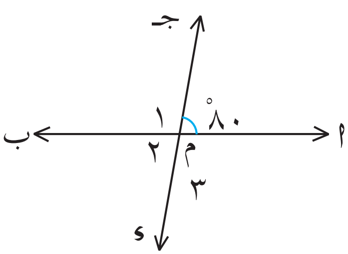
شكل (٥–١٣٢)

٥ : ١١ اختبار الوحدة

[١] اذكر نوع كل من الزوايا التالية : ٧٥° ، ١٨٠° ، ٢٥٠° ، ١٦٥°

[٢] في الشكل (٥ – ١٣٣) :

احسب قياس الزوايا ١ ، ٢ ، ٣

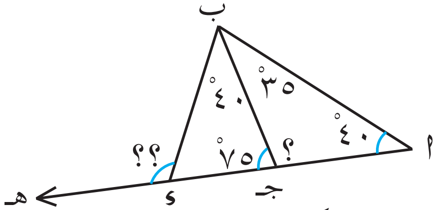


شكل (٥–١٣٣)

[٣] فـــي الشكـل (٥ – ١٣٤) :

احســب قيـاس (∡ ٲ جـ ب) ،

قيا س (∡ ب ء هـ) .



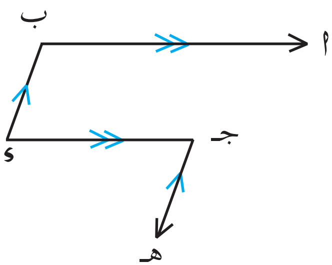
شكل (٥ –١٣٤)

[٤] فـــي الشكل (٥ – ١٣٥) :

$\overleftarrow{\text{ب ٲ}}$ // $\overline{\text{جـ ء}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$ // $\overleftarrow{\text{جـ هـ}}$.

(ٲ) اذكر زاويتين متساويتين في القياس مع ذكر السبب .

(ب) اذكـــــر زاويتين مجمـــوع قياسيهما = ١٨٠° مع ذكر السبب .



شكل (٥ –١٣٥)

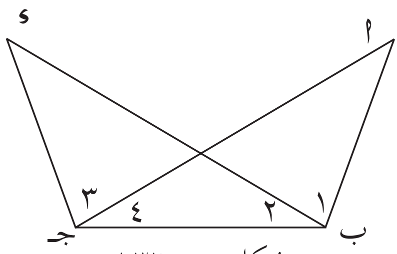
[٥] (ٲ) اذكـــر الحـالات التـي تتطابــق فيها المثلثات .

(ب) فـــي الشكـل (٥ –١٣٦):

إذا كان ق (∡١) = ق (∡ ٣)،

ق (∡ ٢) = ق (∡ ٤)

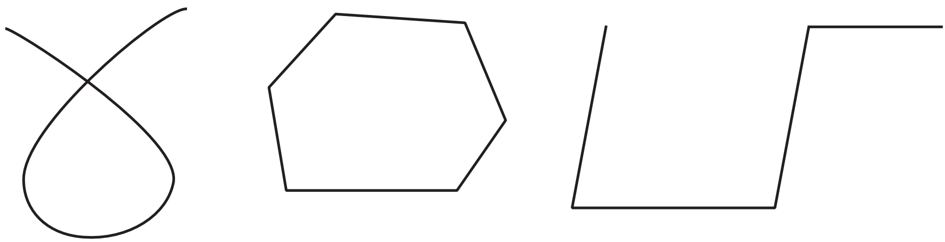
أثبت أن $\overline{\text{ٲ ب}}$ = $\overline{\text{ء جـ}}$.



شكل (٥ –١٣٦)

[٦] ارسم المستوى الإحداثي وحدد عليه النقطة (٢ ، –٣) ثم أوجد صورتها بالانعكاس في محور الصادات .

٦ : ١ المضلّعـات



شكل (٦ – ١ أ)　　شكل (٦ – ١ ب)　　شكل (٦ – ١ جـ)

تأمل الأشكال أعلاه ، تلاحظ أن كل شكل مكون من خط .

الخطان في الشكلين (٦ – ١ أ ، ب) مكوّ نان من عدة قطع مستقيمة متتابعة كل قطعة ليست على استقامة القطعة التي تتصل بها مباشرة ، لذلك يسمى الخط في الشكل (٦ – ١ أ) خطاً منكسراً ، ويسمى الخط في الشكل (٦ – ١ ب) خطاً منكسراً مغلقاً، لماذا ؟ ويسمى كذلك مضلعاً

بينما الشكل (٦ – ١ جـ) عبارة عن خط منحنى (وقد يكون مغلقاً أو مفتوحاً) .

المضلع خط منكسر مغلق ويسمى حسب عدد أضلاعه .

يعتبر المثلث هو المضلع الأقل عدداً من القطع المستقيمة حيث يتكون فقط من ثلاث قطع .

القطع المستقيمة المؤلفة لهذا المضلع هي أضلاع هذا المضلع وأطراف الأضلاع هي رؤوس المضلع .

عدد رؤوس المضلع تساوي عدد زواياه وتساوي عدد أضلاعه .

فالمثلث له ثلاثة رؤوس وثلاث زوايا وثلاثة أضلاع . ويُسمى مضلعاً ثلاثياً أو مثلثاً .

والشكل الرباعي له أربعة رؤوس . وأربع زوايا ، وأربعة أضلاع .

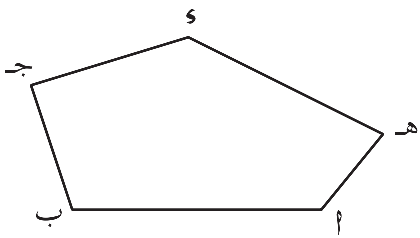
تدريب (١)

كم عدد رؤوس وأضلاع وزوايا كل من الأشكال التالية :

أ) الخماسي   ب) التُّساعي   جـ) الثلاثي عشر .

مثـــال

سمّ الشكل (٦ – ٢) ، وحدّد عدد رؤوسه، وعدد زواياه ، ثم سمِّ هذه الرؤوس والزوايا .



شكل (٦ – ٢)

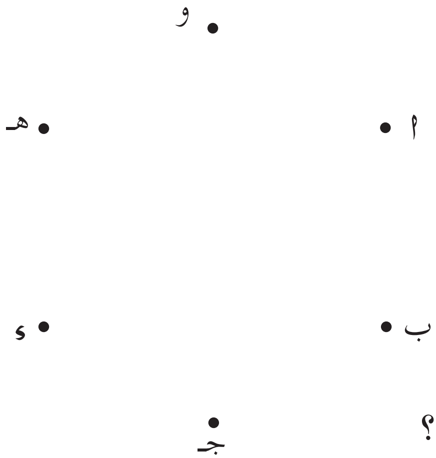
الحل :

– الشكل (٦–٢) له خمسة أضلاع $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}}$ ، $\overline{\text{ء هـ}}$ ، $\overline{\text{هـ أ}}$
ولذا يسمى مضلعاً خماسياً .

– له خمسة رؤوس هي أ ، ب ، جـ ، ء ، هـ

– وله خمس زوايا هي ∡ هـ أ ب ، ∡ أ ب جـ ، ∡ ب جـ ء ، ∡ جـ ء هـ ، ∡ ء هـ أ

نشاط (١)



شكل (٦ – ٣)

في الشكل (٦ – ٣) صل النقاط ا ، ب ، جـ ، ء ، هـ ، و ، لتحصل على مضلع ، ثم :

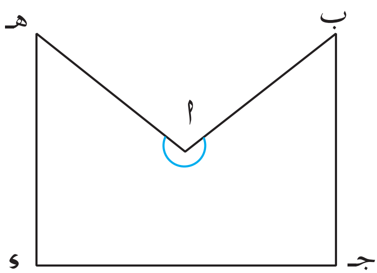
– قس أضلاع المضلع .

– قس زواياه الداخلية ، ماذا تلاحظ ؟

تلاحظ أن : جميع الأضلاع متساوية في الطول ، وكذلك جميع الزوايا متساوية في القياس . مثل هذا المضلع يسمى مضلعاً منتظماً .

المضلع المنتظم هو مضلع جميع أضلاعه وزواياه متطابقة .

نشاط (٢)



شكل (٦ – ٤)

في الشكل (٦ – ٤) قس زوايا المضلع الداخلية ثم قارن قياس ∢ هـ ا ب ، مع قياس الزوايا الأخرى، ماذا تلاحظ ؟

تلاحظ أن ق (∢ ب ا هـ) > ١٨٠° وهي زاوية داخلية يسمى مثل هذا المضلع مضلعاً محدباً .

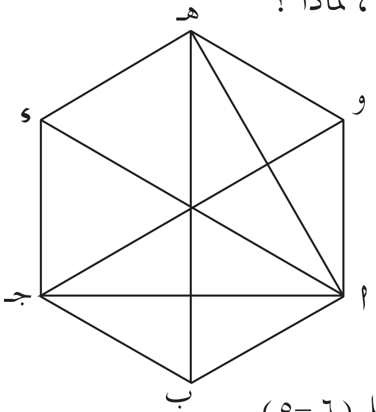
المضلع المحدب هو مضلع فيه على الأقل زاوية واحدة قياسها أكبر من ١٨٠°

المثلث المتساوي الأضلاع هو مضلع منتظم ، لماذا ؟

والمربع أيضاً مضلع منتظم ، لماذا ؟

في الشكل (٦–٥) : $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overline{\text{أ هـ}}$ أقطار ،

ويمكن أن نرسم من أي رأس آخر أيضاً شكلاً له ثلاثة أقطار أخرى .



شكل (٦ –٥)

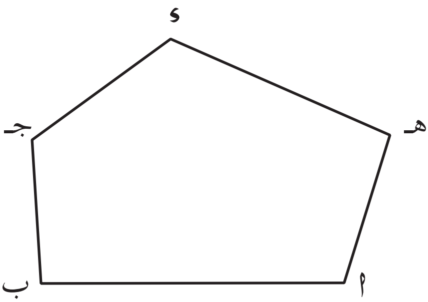
قطر المضلع هو القطعة المستقيمة التي تصل بين رأسين غير متتاليين في المضلع .

تدريب (٢)

في الشكل (٦ – ٦)

كم قطراً يمكن رسمه من أي رأس للخماسي أ ، ب ، جـ ، ء ، هـ ؟

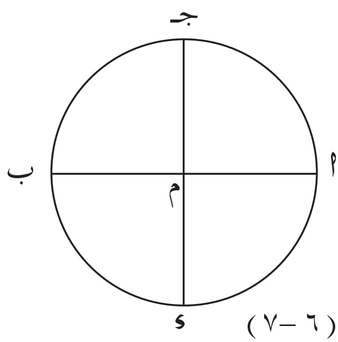
كم عدد أقطار الخماسي ؟



شكل (٦ –٦)

نشاط (٣)

ارسم مربعاً في دائرة مستعيناً بالشكل (٦ – ٧) .



شكل (٦ –٧)

تمارين ومسائل

[١] أكمل ما يأتي :

أ) القطعة المستقيمة التي تصل بين رأسين متتاليين في المضلع تسمى .....

ب) في المضلع كل قطعة مستقيمة تصل بين رأسين غير متتاليين تسمى ....

جـ) من رأس واحد في المضلع السباعي يمكن رسم .... من الأقطار .

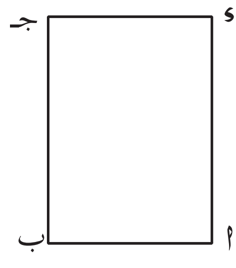
ء) في المضلع تتساوى عدد الأضلاع مع عدد .... مع عدد ... .

هـ) إذا كان قياس إحدى الزوايا الداخلية للمضلع أكبر من ١٨٠° يسمى المضلع بالمضلع .... .

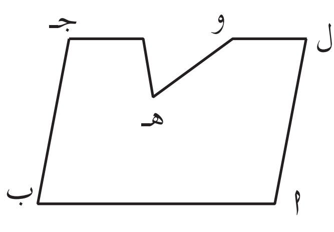
[٢] أكمل الجدول التالي :

عدد أضلاع المضلع	عدد رؤوسه	عدد زواياه
٧		
	١٢	
		٤٣
١٠٥		

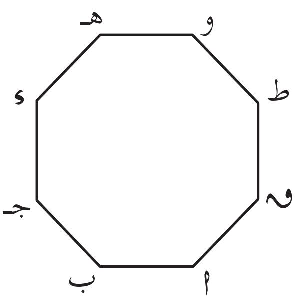
[٣] اكتب اسم كل مضلع في الأشكال (٦ – ٨أ ، ب ، جـ) ثم عيّن أياً منها المضلع المحدب والمضلع غير المحدب .



شكل (٦ –٨أ)



شكل (٦ – ٨ب)



شكل (٦ –٨جـ)

[٤] ارسم شكلاً سداسياً ثم اذكر كم عدد أقطاره ، وكم عدد زواياه ، وكم قطراً يمكن رسمه من كل رأس ؟

[٥] ما عدد أقطار خماسي غير محدب ؟

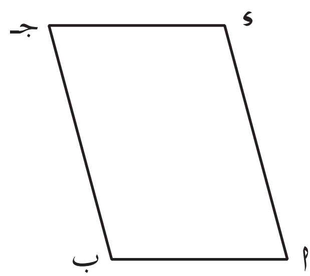
[٦] ارسم سداسياً منتظماً داخل الدائرة م .

[٧] ارسم ثلاثة أشكال رباعية مختلفة ، ثم احسب مجموع درجات الزوايا الداخلية لكل منها .

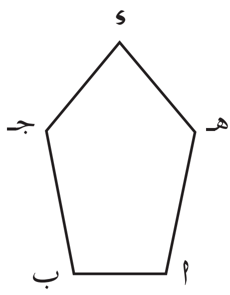
[٨] إذا كان مجموع قياسات زوايا المثلث ١٨٠° ، احسب مجموع قياسات زوايا مضلع رباعي بتقسيمه إلى مثلثين .

٦ : ٢ قياسات الزوايا الداخلية للمضلع النوني

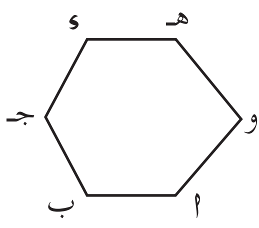
نشـــــاط



شكل (٦ –٩ ا)



شكل (٦ – ٩ب)



شكل (٦ – ٩جـ)

في الأشكال (٦ – ٩ ا ، ب ، جـ) ارسم من النقطة ا أقطار كل مضلع.

ثم أجب على الآتي :

١ – كم مثلثاً في الشكل (٦ – ٩ ا)؟

٢ – كم مثلثاً في المضلع المرسوم في الشكل (٦–٩ب) ؟

٣ – كم مثلثاً في المضلع المرسوم في الشكل (٦–٩جـ) ؟

٤ – أكمل الجدول المجاور .

اسم المضلع	عدد أضلاعه	عدد المثلثات	مجموع قياسات زواياه
مثلث	٣	١	°١٨٠
رباعي			
خماسي			
سداسي			

حيث أن مجموع قياسات زوايا كل مثلث يساوي °١٨٠ ومن ذلك نجد مجموع قياسات زوايا كل مضلع .

نلاحظ أن : عدد المثلثات داخل كل مضلع تنقص اثنين عن عدد الأضلاع ومن ذلك يمكننا استنتاج مجموع قياسات زوايا المضلع النوني ، أي الذي عدد أضلاعه **ن** من الأضلاع .

مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع النوني = (ن – ٢) × °١٨٠
حيث ن عدد أضلاع المضلع .

مثال (١)

أوجد قياس كل زاوية في مضلع سداسي منتظم ؟

الحل :

مجموع قياسات المضلع السداسي المنتظم = (ن – ٢) × °١٨٠

= (٦ – ٢) × °١٨٠

= ٤ × °١٨٠ = °٧٢٠

∵ الشكل السداسي منتظم فجميع زواياه متطابقة ،

∴ قياس كل زاوية = ٧٢٠ ÷ ٦ = ١٢٠°

مثال (٢)

ا ب جـ ء هـ مضلع خماسي فيه ق(∡ ا) = ٩٨° ، ق(∡ ب) = ١٤٢°

احسب قياس كل زاوية من الزوايا المتبقية إذا علمت أنها متساوية في القياس .

ثم أوجد قياس الزاوية الخارجية ا́

الحـل :

مجموع قياسات زوايا المضلع الخماسي = (٥ – ٢) × ١٨٠°

= ٣ × ١٨٠° = ٥٤٠°

ولكن ق(∡ ا) + ق(∡ ب) = ٩٨° + ١٤٢° = ٢٤٠°

∴ ق(∡ جـ) + ق(∡ ء) + ق(∡ هـ) = ٥٤٠° – ٢٤٠° = ٣٠٠°

∵ ق(∡ جـ) = ق(∡ ء) = ق(∡ هـ)

∴ قياس كل زاوية = ٣٠٠ ÷ ٣ = ١٠٠°

∵ الزاويـة الخارجيـة للزاويـة ا هي ا́ ،

∴ ق(∡ ا́) = ١٨٠° – ق(∡ ا)

= ١٨٠° – ٩٨° = ٨٢°

مثال (٣)

أوجد عدد أضلاع المضلعات التالية (إِن أمكن) والتي مجموع قياسات

زواياها الداخلية هي : ا) ١٢٦٠° ب) ٨٨٠° جـ) ١٨٠٠°

الحـل :

أ) ∵ مجموع قياسات زوايا المضلع النوني = (ن – ٢) × ١٨٠°

١٢٦٠° = (ن – ٢) × ١٨٠°

١٢٦٠° = ١٨٠ ن – ٣٦٠

١٨٠ ن = ١٢٦٠ + ٣٦٠

∴ عدد أضلاع المضلع (ن) = $\frac{١٦٢٠}{١٨٠}$ = ٩ أضلاع

ب) ∵ مجموع قياسات زوايا المضلع النوني = (ن – ٢) × ١٨٠°

٨٨٠° = (ن – ٢) × ١٨٠°

٨٨٠° = ١٨٠ ن – ٣٦٠

١٨٠ ن = ١٢٤٠

∴ ن = $\frac{١٢٤٠}{١٨٠}$ ≈ ٦,٩ وهذا غير ممكن إذ لايوجد مضلع

عدد أضلاعه ٦,٩ ضلعاً .

جـ) ∵ مجموع قياسات زوايا المضلع النوني = (ن – ٢) × ١٨٠°

١٨٠٠° = (ن – ٢) × ١٨٠°

١٨٠٠° = ١٨٠ ن – ٣٦٠°

∴ عدد أضلاع المضلع (ن) = $\frac{٢١٦٠}{١٨٠}$ = ١٢ ضلعاً .

تمارين ومسائل

[١] أوجد مجموع قياسات زوايا مضلع عدد أضلاعه :

أ) تسعة أضلاع   ب) اثني عشر ضلعاً

جـ) خمسة عشر ضلعاً   ء) سبعة عشر ضلعاً

[٢] أوجد قياس كل زاوية من زوايا المضلع المنتظم ، إذا كان عدد أضلاعه :

أ) تسعة أضلاع   ب) احدى عشر ضلعاً

جـ) ثلاثة عشر ضلعاً   ء) ستة عشر ضلعاً

[٣] ما عدد أضلاع المضلعات التالية إذا علمت أن مجموع قياسات زوايا ه هي :

أ) ٣٦٠°   ب) ٥٤٠°   جـ) ٧٢٠°   ء) ١٩٨٠°

[٤] أ ب جـ ء هـ و شكل سداسي،

فيه ق (∡ أ) = ١٢٠°

ق (∡ ب) = ٨٥°

ق (∡ جـ) = ١٧٠°

ق (∡ ء) = ١٤٥°

أوجد قياسات الزوايا المتبقية إذا

علمت أنها متطابقة .

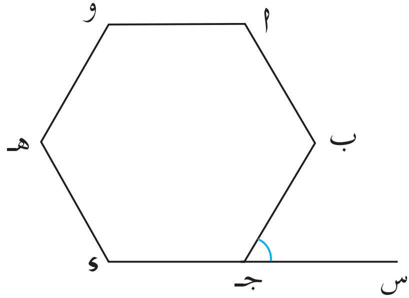
[٥] أ ب جـ ء هـ و شكل سداسي فيه :

ق (∡ أ) = ١٢٠° ، ق (∡ ء) = ٧٠° ، ق (∡ هـ) = ١٤٥°

ق (∡ و) = ١٦٠° ، احسب قياس الزاويتين المتبقيتين إذا كانت

إحداهما ضعف الأخرى .

[٦] في الشكل (٦ – ١٠)، أ ب جـ ء هـ و سداسي منتظم . أحسب قياس (∢ س جـ ب)

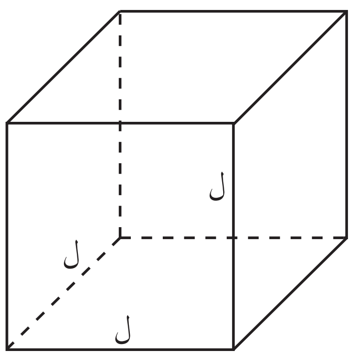


شكل (٦ – ١٠)

[٧] إذا كان قياس الزاوية الخارجية لمضلع منتظم °٦٠ ، فما عدد أضلاع هذا المضلع إذا كان مجموع قياسات زواياه الداخلية °٧٢٠

٦ : ٣ متوازي المستطيلات

انظر إلى الشكل (٦–١١) إنه يمثل مكعباً وتعرف أن المكعب هو متوازي مستطيلات أبعاده الثلاثة متساوية في الطول .



شكل (٦ – ١١)

حجم المكعب = ل × ل × ل = ل^{٣}

حيث ل طول ضلع المكعب .

فمثلاً المكعب الذي طول ضلعه ٧سم ، فإن حجمه = ٧^{٣} = ٣٤٣سم^{٣}

وإذا كان حجم المكعب ١٢٥سم^{٣} ، فهل بالإمكان إيجاد طول ضلعه ؟

لمعرفة ذلك علينا أن نبحث عن عدد إذا ضُرب في نفسه ثلاث مرات يكون

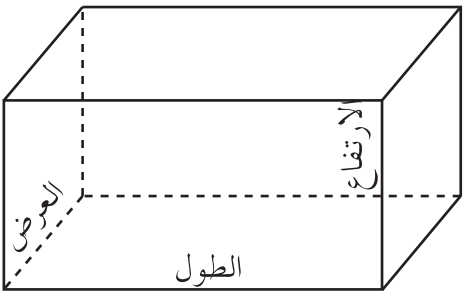
حاصل الضرب ١٢٥سم^{٣} أي إننا نوجد الجذر التكعيبي للعدد ١٢٥ .وبشكل عام إذا عُلم حجم المكعب ، فإن طول ضلعه يساوي الجذر التكعيبي لحجمه .

طول ضلع المكعب = $\sqrt[٣]{س}$ حيث س حجم المكعب .

أي أن طول ضلع المكعب الذي حجمه ١٢٥سم^{٣} = $\sqrt[٣]{١٢٥}$

= $\sqrt[٣]{٥ \times ٥ \times ٥}$ = $\sqrt[٣]{٥^{٣}}$ = ٥سم

الشكل (٦ –١٢) يمثل متوازي مستطيلات فإذا علم حجم متوازي المستطيلات وعلم طولا بعدين فيه يمكن حساب البعد الثالث .



شكل (٦ –١٢)

حجم متوازي المستطيلات = الطول × العرض × الارتفاع

مثال (١)

متوازي مستطيلات حجمه ٢١٠م^{٣} ؛ احسب عرضه إذا كان طوله ٧م ، وارتفاعه ٥م .

الحل :

∵ حجم متوازي المستطيلات = الطول × العرض × الارتفاع

نفرض أن عرض متوازي المستطيلات = ل ، طوله = ط ، وارتفاعه = ع ،

∴ الحجم = ط × ل × ع

٢١٠ = ٧ × ل × ٥

٢١٠ = ٣٥ ل

∴ عرض متوازي المستطيلات = ل = $\frac{٢١٠}{٣٥}$ = ٦ م

مثال (٢)

متوازي مستطيلات من المعدن أبعاده ٤ سم ، ٨سم ، ١٦سم ، صُهر وحوّل إلى مكعب دون أن يُفقد منه شيء . أوجد طول ضلع المكعب .

الحـل :

∵ حجم متوازي المستطيلات = الطول × العرض × الارتفاع

= ٤ × ٨ × ١٦ = ٥١٢سم^{٣}

وهو حجم المكعب .

∴ طول ضلع المكعب = ل = $\sqrt[٣]{٥١٢}$

= $\sqrt[٣]{٨ \times ٨ \times ٨}$ = $\sqrt[٣]{٨^{٣}}$ = ٨سم

تمارين ومسائل

[١] أوجد طول ضلع المكعب الذي حجمه يساوي ٧٢٩ سم^{٣}

[٢] أوجد طول حوض على شكل متوازي مستطيلات إذا علمت أن عرضه ٧سم ، وارتفاعه ١٢سم وحجمه ٧٥٦ سم^{٣}

[٣] مكعب مساحة أحد أوجهه ٢٥٦سم^{٢} ، ما حجمه ؟

[٤] حوض على شكل متوازي مستطيلات حجمه ١٢٠م^3 ، أوجد ارتفاعه إذا كان طول قاعدته ٦م وعرضها ٤م .

[٥] حوض ماء على شكل متوازي مستطيلات حجمه ٣٦٠م^3 ، احسب عرضه إذا كان طوله ١٢م ، وارتفاعه ٦م .

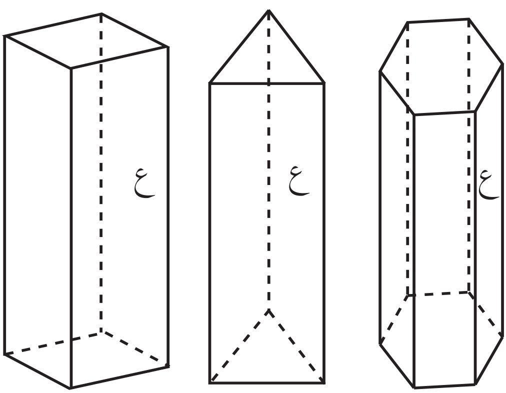
[٦] سبيكة من المعدن على شكل متوازي مستطيلات أبعادها : ٨سم ، ٨سم ، ٢٧سم صهرت وصُبّت على شكل مكعب أوجد طول ضلع هذا المكعب على فرض أن الجسم لم يفقد شيئاً أثناء عملية الصهر والصب .

[٧] صفيحة معدنية رقيقة مكعبة الشكل مساحة أحد أوجهها الستة ٠,٢٥م^2 ما حجمها بالأمتار المكعبة ؟ وما مقدار ما تسعه من لترات الماء ؟ علماً بأن (الليتر = ديسيمتر مكعب = ١٠٠٠سم^3) .

[٨] متوازي مستطيلات حجمه ٤٣٧٤م^3 ، والنسبة بين أبعاده الثلاثة ١ : ٢ : ٣ ، أوجد المساحة الكلية لمتوازي المستطيلات .

٦ : ٤ المنشور

تعرفت سابقاً أن المنشور القائم عبارة عن مجسم متعدد السطوح وله قاعدتان متطابقتان ومتوازيتان ، وأوجهه الجانبية عبارة عن مستطيلات ، فكل شكل من الأشكال (٦–١٣أ، ب،جـ) يمثّل منشوراً قائماً قاعدته تختلف من شكل إلى آخر وارتفاعه « ع » يمثل أحدأطوال أحرفه .



شكل (٦ –١٣أ) شكل (٦ –١٣ب) شكل(٦ –١٣جـ)

تذكر :

حجم المنشور = مساحة القاعدة × الارتفاع

ومساحته الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

بمعلومية حجم المنشور أو مساحته الجانبية يمكننا إِيجاد الارتفاع أو مساحة القاعدة .

ويتضح ذلك من خلال الأمثلة التالية :

مثال (١)

منشور قاعدته مثلث قائم الزاوية طولا ضلعي القائمة ٤سم ، ٣سم ، حجمه ٤٢سم^{٣} ، أوجد ارتفاعه .

الحـل :

∵ حجم المنشور = مساحة القاعدة X الارتفاع

∵ مساحة القاعدة = $\frac{١}{٢}$ X ٤ X ٣ = ٦سم^{٢}

∴ الارتفاع = $\frac{\text{الحجم}}{\text{مساحة القاعدة}}$ = $\frac{٤٢}{٦}$ = ٧سم

مثال (٢)

منشور أطوال اضلاع قاعدته الرباعية ٣سم ، ٥سم ، ٤سم ، ٦سم ، ومساحته الجانبية ١٤٤سم^{٢} ، احسب ارتفاعه .

الحـل :

مساحة المنشور الجانبية = محيط القاعدة X الارتفاع

$$\text{ارتفاع المنشور} = \frac{\text{مساحته الجانبية}}{\text{محيط قاعدته}} = \frac{١٤٤}{١٨} = ٨\text{سم} .$$

مثال (٣)

صفيحة على شكل منشور رباعي قاعدته مستطيل ابعاده ٣٠سم ، ٢٠سم ومساحته الكلية ٥٧٠٠سم^{٢} . أوجد ارتفاعه .

الحـل :

∵ المساحة الكلية للمنشور = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

٥٧٠٠ = ٢ (٢٠ + ٣٠) ع + ٢ (٢٠ X ٣٠)

٥٧٠٠ = ١٠٠ ع + ١٢٠٠

$$\therefore \text{ارتفاع المنشور ع} = \frac{٥٧٠٠ - ١٢٠٠}{١٠٠} = \frac{٤٥٠٠}{١٠٠} = ٤٥\text{سم} .$$

تماريـن ومسائـل

[١] منشور ثلاثي قائم قاعدته مثلث قائم الزاوية طولا ضلعي القائمة ٦سم ، ٨سم ، وحجمه ٢٤٠سم^{٣} ، أوجد ارتفاعه .

[٢] احسب ارتفاع المنشور الرباعي الذي قاعدته مستطيل طولا بعديه ٨سم ، ١٠سم وحجمه ٧٢٠سم^{٣} ، أوجد مساحته الجانبية ومساحته الكلية .

[٣] منشور رباعي ارتفاعه ٧سم وقاعدته مستطيلة الشكل عرضها ٤سم . أوجد طول القاعدة إذا علمت أن مساحته الجانبية ٩٨سم^{٢}، ثم أوجد حجم المنشور .

[٤] منشور حجمه ٩٧٢سم^{٣} ، قاعدته مربعة الشكل وارتفاعه ١٢سم ، أوجد طول ضلع القاعدة ، ثم أوجد مساحته الجانبية والكلية .

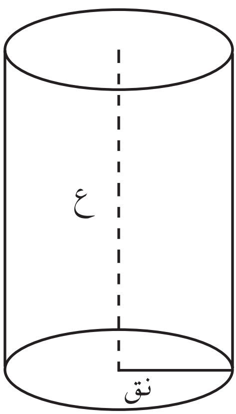
[٥] منشور سداسي مساحة قاعدته ٢٦٠٠٠سم^{٢}، وارتفاعه ٣م . احسب حجمه بالمتر المكعب .

[٦] منشور رباعي مصنوع من المعدن قاعدته مستطيل بعداه ١٠سم ، ٩سم فإذا كانت مساحته الكلية ٧٧٦,٦سم^{٢} ، احسب ارتفاع المنشور .

[٧] منشور قاعدته على شكل معين طولا قطريه ٨سم ، ٦,٨سم ، وحجمه ٤٠٨سم^{٣} ، أوجد ارتفاعه .

٦ : ٥ الاسطوانة

في الشكل (٦ – ١٤) اسطوانة قائمة قاعدتها دائرة نصف قطرها نق وارتفاعها ع



شكل (٦ – ١٤)

تعلم أن :

حجم الاسطوانة القائمة = مساحة القاعدة × الارتفاع = π نق^{٢} × ع

المساحة الجانبية للاسطوانة القائمة = محيط القاعدة × الارتفاع

= ٢ π نق × ع

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + ضعف مساحة القاعدة

ومن ذلك يمكننا أن نحسب أيّاً من المتغيرات في هذه القواعد بمعلومية المتغيرات الأخرى .

ويتضح لنا ذلك من خلال الامثلة التالية :

مثال (١)

حوض إسطواني الشكل حجمه ٣٧٧,٣ دسم^{٣} ونصف قطر قاعدته ٤,٩ دسم ، أوجد ارتفاعه .

الحل :

ارتفاع الحوض = الحجم ÷ مساحة القاعدة

$$= ٣٧٧,٣ \div \left(\frac{٢٢}{٧} \times \frac{٤٩}{١٠} \times \frac{٤٩}{١٠} \right)$$

$$= ٣٧٧,٣ \times \frac{٧}{٢٢} \times \frac{١٠}{٤٩} \times \frac{١٠}{٤٩}$$

$$= \frac{٣٧٧٣}{١٠} \times \frac{٧٠٠}{٢٢ \times ٤٩ \times ٤٩}$$

$$= \frac{٢٦٤١١٠}{٥٢٨٢٢} = ٥ \text{ دسم}$$

مثال (٢)

اسطوانة حجمها ٩٢٤سم^{٣} وارتفاعها ٦سم ، أوجد قطر قاعدتها ومساحتها الجانبية .

الحل :

∵ حجم الاسطوانة = π نق^{٢} × ع

$$٩٢٤ = \frac{٢٢}{٧} \text{ نق}^{٢} \times ٦$$

∴ $\text{نق}^{٢} = ٩٢٤ \times \frac{٧}{٢٢ \times ٦} = \frac{٦٤٦٨}{١٣٢} = ٤٩ \text{سم}^{٢}$

∴ نق = $\sqrt{٤٩}$ = ٧سم .

∴ قطر قاعدة الاسطوانة = ٢ × ٧ = ١٤ سم .

∵ المساحة الجانبية للاسطوانة = محيط القاعدة × الارتفاع

$$= ٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ٧ \times ٦ = ٢٦٤ \text{سم}^{٢} .$$

مثال (٣)

اسطوانة دائرية طول قطر قاعدتها ١٤سم ومساحتها الجانبية ٦١٦سم^{٢} . أوجد ارتفاعها ومساحتها الكلية وحجمها .

الحل :

∵ المساحة الجانبية للاسطوانة = محيط القاعدة × الارتفاع

$$٦١٦ = ٢ \times \frac{٢٢}{\cancel{٧}} \times \cancel{٧} \times ع$$

∴ ارتفاع الاسطوانة ع $= \frac{٦١٦}{٤٤} = ١٤$سم .

∵ مساحة قاعدة الاسطوانة $= \pi$ نق^{٢} $= \frac{٢٢}{\cancel{٧}} \times \cancel{٧} \times ٧ = ١٥٤$سم^{٢} ،

المساحة الكلية للاسطوانة $= ٦١٦ + ٢ \times ١٥٤ = ٩٢٤$سم^{٢} ،

حجم الاسطوانة $= \pi$ نق^{٢} ع $= \frac{٢٢}{\cancel{٧}} \times \cancel{٧} \times ٧ \times ١٤ = ٢٢ \times ٩٨$

$= ٢١٥٦$ سم^{٣}

تمارين ومسائل

[١] اسطوانة نصف قطرها ٧سم ، وحجمها ١٨٤٨سم^{٣} . احسب ارتفاعها .

[٢] اسطوانة مساحتها الجانبية ١٥٨,٤سم^{٢} ، ونصف قطر قاعدتها ١٢سم ، أوجد ارتفاعها .

[٣] حوض اسطواني الشكل حجمه ٣٣٢٧٥ دسم^{٣} ، فكم ارتفاعه إذا كان قطر قاعدته ٥,٥ دسم .

[٤] خزان ماء على شكل اسطوانة سعته ٦٢٨ لتر . وإذا كان ارتفاعه ١,٢٥ متر ، احسب طول نصف قطر قاعدته علماً بأن (π = ٣,١٤ ، اللتر = ١٠٠٠سم^{٣}) .

[٥] اسطوانة ارتفاعها يساوي قطر قاعدتها ، وحجمها ٣٦٩,٥دسم^{٣} . أوجد نصف قطر قاعدتها .

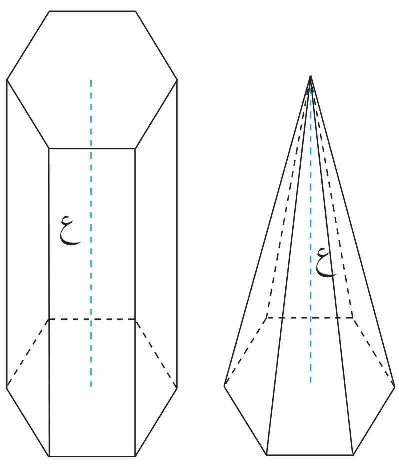
[٦] سبيكة من الرصاص على شكل متوازي مستطيلات أبعاده ٣٣سم ، ٢٥م، ٤٨سم صُهرت وحوّلت إلى اسطوانة دائرية قائمة مُصْمَته ارتفاعها ٥٦سم، أوجد نصف قطر قاعدة الاسطوانة علماً بأنه لم يُفقد شئ من الرصاص أثناء صهر السبيكة .

[٧] قطعة من الرصاص على شكل اسطوانة نصف قطر قاعدتها ٧سم وارتفاعها ١١سم صُهرت وحوّلت إلى متوازي مستطيلات طوله ٢٢سم وعرضه ٧سم ، احسب ارتفاعه .

٦ : ٦ حجم الهرم

في الشكلين (٦ – ١٥أ ، ب) منشور وهرم . قاعدة كل منهما سداسية ، قاعدة الهرم وقاعدة المنشور متطابقتان وارتفاعهما متطابقان « ع ».

من الواضح أن حجم الهرم لا يساوي حجم المنشور للتأكد أجرِ النشاط التالي :



شكل (٦ –١٥أ) شكل (٦ – ١٥ب)

– املأ الهرم تماماً بالسائل أو التراب وأفرغه في المنشور ،كرر ذلك إلى أن يمتلئ المنشور تماماً .

كم مرة ملأت الهرم وأفرغته في المنشور ليمتلئ المنشور تماماً .

تلاحظ أن :

حجم الهرم القائم $= \frac{1}{3}$ حجم المنشور

$= \frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

مثال (١)

هرم سداسي القاعدة مساحة قاعدته ٨م^{٢} ، وارتفاعه ١٢م ، أوجد حجمه .

الحل :

حجم الهرم $= \frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

$= \frac{1}{3}$ × ٨ × ١٢

= ٨ × ٤ = ٣٢ م^{٣}

مثال (٢)

هرم رباعي ارتفاعه ٩سم وقاعدته مربعة الشكل طول ضلعها ١٠سم ، أوجد حجم الهرم .

الحـل :

$\because$ مساحة قاعدة الهرم = ١٠سم × ١٠سم = ١٠٠سم^{٢}

$\therefore$ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{\cancel{٣}}$ × ١٠٠ × $\overset{٣}{\cancel{٩}}$ = ٣٠٠سم^{٣}

تماريـن ومسائـل

[١] أوجد حجم هرم رباعي ارتفاعه ٣٠سم ، ومساحة قاعدته ٦٢٠سم^{٢} .

[٢] هرم رباعي قاعدته مستطيلة الشكل، أبعادها ٦سم ، ٥سم ، أوجد حجم الهرم إذا علمت أن ارتفاعه ١٥سم .

[٣] هرم قاعدته مربعة الشكل ارتفاعه ٩سم ، وحجمه ٢٧سم^{٣} . أوجد طول ضلع قاعدته .

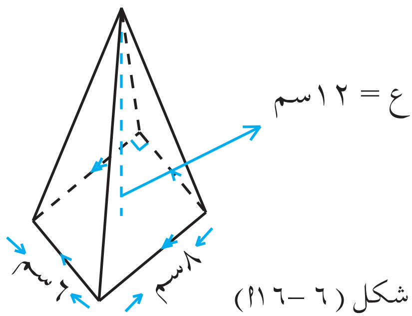
[٤] احسب حجم هرم ثلاثي قاعدته مثلث قائم طولا ضلعي القائمة فيه ٦٥م ، ٤٢م ، ارتفاع الهرم ١٤م .

[٥] هرم ثلاثي حجمه ٣٩٢سم^{٣} ، وارتفاعه ٨سم ، أوجد مساحة قاعدته.

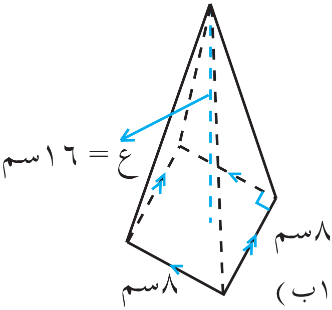
[٦] هرم ثماني ، مساحة قاعدته ٢٦٥م^{٢} ، وحجمه ٩٨٤٥سم^{٣} ، احسب ارتفاعه مقرباً إلى أقرب عشرة .

[٧] هرم رباعي معدني ارتفاعه ١٦سم ومساحة قاعدته ٣٠٠سم^{٢} صُهر وحوّل إلى متوازي مستطيلات له ارتفاع الهرم نفسه ، أوجد مساحة متوازي المستطيلات .

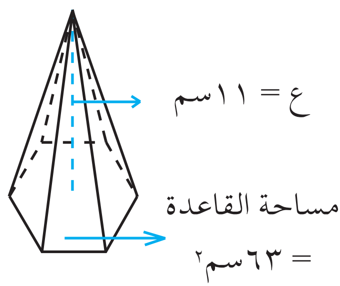
[٨] احسب حجم الاهرامات في الأشكال (٦ – ١٦ أ ، ب جـ ، ء) كل على حده وفق البيانات على كل الأشكال .



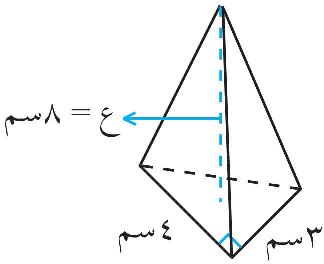
شكل (٦ –١٦أ)



شكل (٦ –١٦ب)

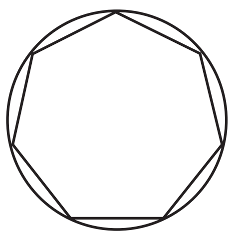


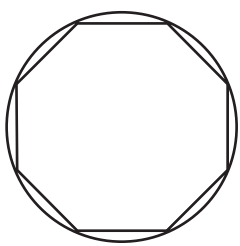
شكل(٦ –١٦جـ)

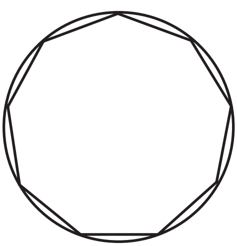


شكل (٦ –١٦ء)

٦ : ٧ حجم المخروط


شكل (٦ –١٧أ)

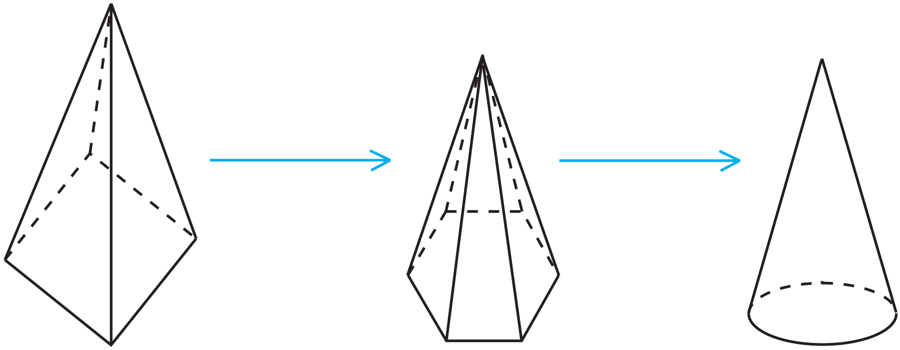

شكل (٦ –١٧ب)


شكل(٦ –١٧جـ)

الأشكال (٦ – ١٧ أ ، ب ، جـ) تمثل مضلعات مرسومة داخل دوائر وهي

قواعد لعدد من الأهرامات كلما زاد عدد أضلاع هذه المضلعات أصبح شكل القاعدة أقرب إلى دائرة .

وعليه فالهرم القائم سيكون مخروطاً دائرياً قائماً إذا أصبح عدد أضلاع قاعدته عدداً كبيراً جداً كما في الأشكال (٦ – ١٨ أ ، ب ، جـ) .



شكل (٦ –١٨ أ)   شكل (٦ –١٨ب)   شكل(٦ –١٨جـ)

وبما أن حجم الهرم القائم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

فإن :

حجم المخروط القائم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} × ع

حيث نق نصف قطر القاعدة وَ ع ارتفاع المخروط .

مثال (١)

أوجد حجم المخروط الذي نصف قطر قاعدته ١٢سم وارتفاعه ١٤سم .

الحـل :

$$\text{حجم المخروط} = \frac{١}{٣} \pi \text{ نق}^{٢} \times \text{ع}$$

$$= \frac{١}{\cancel{٣}} \times \frac{٢٢}{\cancel{٧}} \times \overset{٤}{\cancel{١٢}} \times ١٢ \times \overset{٢}{\cancel{١٤}}$$

$\therefore$ حجم المخروط = ٢١١٢ سم^{٣}

مثال (٢)

مخروط دائري حجمه ٧٧٠سم^{٣} وارتفاعه ١٥سم . أوجد نصف قطر قاعدته .

الحـل :

$$\text{حجم المخروط} = \frac{١}{٣} \pi \text{ نق}^{٢} \times \text{ع}$$

$$٧٧٠ = \frac{١}{\cancel{٣}} \times \frac{٢٢}{٧} \text{ نق}^{٢} \times \overset{٥}{\cancel{١٥}} \text{ سم}$$

$$٧٧٠ = \frac{١١٠}{٧} \text{ نق}^{٢} .$$

$$\therefore \text{نق}^{٢} = ٧٧٠ \times \frac{٧}{١١٠} = ٤٩ \text{سم}^{٢}$$

$$\therefore \text{نق} = \sqrt{٤٩} = ٧\text{سم}$$

تمارين ومسائل

[١] أوجد حجم المخروط الذي نصف قطر قاعدته ٢١سم وارتفاعه ١٢سم .

[٢] مخروط حجمه ١٤٠٨م^{٣} ، وارتفاعه ٢١سم . أوجد طول قطر قاعدته .

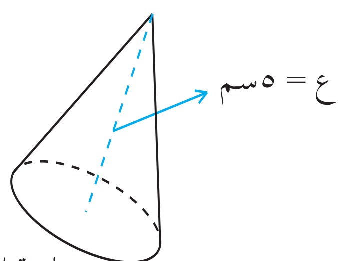
[٣] مخروط حجمه ١٣٥٠م^{٣} ، ومساحة قاعدته ٢٢٥م^{٢} . أوجد ارتفاعه.

[٤] مخروط حجمه ٢٦٦٢سم^{٣} وارتفاعه ٢١سم . أوجد قطر قاعدته .

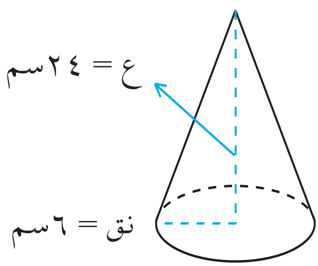
[٥] مخروط حجمه ٩٢٤سم^{٣} وارتفاعه ١٨سم . أوجد مساحة قاعدته .

[٦] منشور خماسي قائم ارتفاعه ٦سم ومساحة قاعدته ١٩٨سم^{٢} ، وحجمه يساوي حجم مخروط ارتفاعه ١٤سم ، أوجد طول قطر قاعدة المخروط.

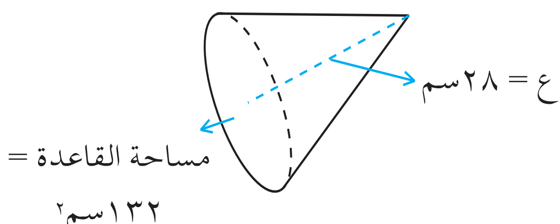
[٧] في الأشكال (٦ – ١٩ أ ، ب ، جـ ، ء) ، أوجد حجم كل مخروط على حده وفق البيانات على كل شكل .



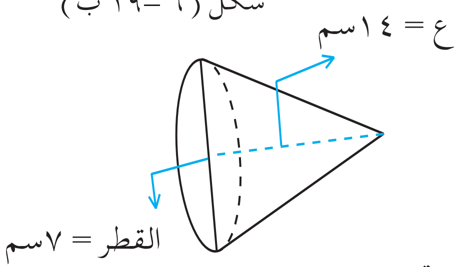
شكل (٦ –١٩ أ)



شكل (٦ –١٩ ب)



شكل(٦ –١٩ جـ)



شكل (٦ –١٩ ء)

٦ : ٨ تمارين ومسائل عامة

[١] ما أقل عدد من القطع المستقيمة التي يكـوّن اتحادها مضلعاً ؟ ارسم مضلعاً يتكون من أقل عدد من القطع المستقيمة .

[٢] أوجد عدد أضلاع المضلعات التالية إذا علمت أن مجموع قياسات زواياها هي : أ) ٧٢٠° ب) ١٤٤٠° جـ) ١٠٨٠°

[٣] أ ب جـ ء هـ و مضلع سداسي فيه ق (∡ أ) = ٢٦٠°

ق (∡ ب) = ١٢٠° ، ق (∡ جـ) = ٩٥° ، ق (∡ ء) = ٤٥°

أوجد قياسي الزاويتين المتبقيتين . علماً أنهما متطابقتان .

[٤] إذا كان حجم مكعب ٣٣٧٥سم³، أوجد طول ضلعه .

[٥] أوجد حجم هرم رباعي قائم ارتفاعه ٢٠سم ومساحة قاعدته ٤٥٠سم² .

[٦] مخروط قائم ارتفاعه ١٠سم ، وقطر قاعدته ١٤سم ، أوجد حجمه .

[٧] المساحة الجانبية لاسطوانة قائمة ١٤٠٨سم² ، وارتفاعها ١٦سم . أوجد نصف قطر قاعدتها .

[٨] إناء على شكل اسطوانة دائرية نصف قطر قاعدتها ١٤سم ومساحتها الجانبية ٢٣٧٦سم² . أوجد ارتفاعها .

[٩] عمود من الخرسانة المسلحة على شكل متوازي مستطيلات حجمه ٦م³ ، ومساحة قاعدته ٠,٧٥ م² ، أوجد ارتفاع العمود .

[١٠] سبيكة من النحاس على شكل منشور رباعي قائم: ارتفاعه ١٨سم ، وقاعدته على شكل متوازي الأضلاع طول قاعدته ١٢سم وارتفاعه ٨سم .صُهرت السبيكة وحوّلت إلى مكعب. احسب طول ضلع المكعب علماً بأنه لم يفقد شيء من النحاس أثناء الصهر .

[١١] حفر عامل حفرة على شكل اسطوانة دائرية قائمة حجمها ٧٥٤,٦م٣ ومحيط قاعدتها ٦١,٦م . كم تكون أجرة العامل الذي حفر الحفرة إذا علمت أن أجرة المتر علواً في هذه الحفرة ١٥٠٠ ريال ؟

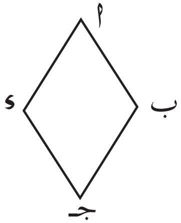
٦ : ٩ اختبار الوحدة

[١] تأمل الشكلين (٦ – ٢٠) (٦–٢١) ، ثم أجب عن الآتي :

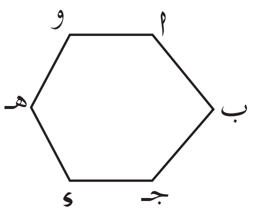
أ) أي الشكلين مضلع منتظم ؟

ب) كم رأساً لكل منهما ؟

جـ) كم قطراً يمكن رسمه من الرأس الواحد لكل منهما ؟



شكل(٦ – ٢٠)



شكل(٦ – ٢١)

[٢] ارسم شكلاً سداسياً منتظماً داخل دائرة نصف قطرها ٣سم ، ثم أوجد قياس كل زاوية .

[٣] كم عدد أضلاع المضلع الذي مجموع قياسات زواياه الداخلية ١٢٦٠° ؟

[٤] مكعب حجمه ٥١٢سم٣ ، ما مساحته الجانبية ؟

[٥] قطعة من الرصاص على شكل اسطوانة نصف قطر قاعدتها ١٤سم وارتفاعها ١١سم ، صُهرت وحوّلت إلى متوازي مستطيلات طوله ٤٤سم وعرضه ٧سم ، احسب ارتفاعه .

[٦] هرم رباعي قاعدته مستطيلة الشكل ، أبعادها ١٢سم ، ١٠سم . أوجد حجم الهرم إذا علمت أن ارتفاعه ٧,٥سم .

[٧] مخروط حجمه ٤٦٢سم٣ ، وارتفاعه ٩سم ، أوجد مساحة قاعدته ؟

الوحــدة السابعــة

الإحصـــاء

مقدمـــة :

بدأ استخدام كلمة الإحصاء لأول مرة في مجالات متعلقة بشؤون الدول والحكومات، وخاصة تلك المتعلقة بقضايا التنظيم وجمع الضرائب وما شابه ذلك .

وقد استخدم العرب الإحصاء في العصور الإسلامية ، وخاصة ما قام به الخليفة المأمون من عمليات تعداد بين الحين والآخر لأفراد جيشه وتصنيفهم وفقاً لمهامهم العسكرية .

أما في الوقت الحاضر فقد أصبح الإلمام بالأساليب الإحصائية ضرورة لكل باحث مهما كان مجال تخصصه أو نوع دراسته ؛ فقد تعددت استخداماته في كثير من المجالات والميادين مثل : الطب ، والزراعة ، والصناعة، والسكان ، كما يستخدم الإحصاء في علوم الفلك والأحياء والوراثه والفيزياء وغيرها من العلوم .

ويرجع السبب في تسمية عصرنا الحاضر بعصر المعلومات إلى علم الإحصاء؛ حيث يُقاس مدى تقدم بلد ما بما يوليه هذا البلد من أهمية لهذا العلم .

٧ : ١ تبويب وتنظيم البيانات الإحصائية

سبق وأن تعرفت على بعض الأساليب (أو الطرق) الإحصائية في الصف السادس ، وفي هذا البند سوف تتعرف على طريقة هامَّة من الطرق الإحصائية، هي طريقة تبويب البيانات الإحصائية في جداول ، تسمى جداول إحصائية، هذه الجداول تمكننا من استخراج المعلومات بسهولة ويسر ، والمثال التالي يوضح ذلك .

مثـــال

الأعداد التالية تمثل بيانات أولية (غير مبوبة) ، وهي لدرجات اختبار شهري لثمانية عشر طالباً ، حيث الدرجة العظمى (٣٠ درجة) :

٢٠ ٢٤ ٢٢ ٢٦ ٢٨ ٢٩

٣٠ ٢٣ ٢٥ ٢٠ ٢٢ ٢٧

٢٤ ٢٣ ٢٩ ٢٥ ٢٥ ٢٤

البيانات السابقة يمكن تبويبها في جدول إِحصائي على النحو التالي :

الدرجة الحاصل عليها	٢٠	٢١	٢٢	٢٣	٢٤	٢٥	٢٦	٢٧	٢٨	٢٩	٣٠	المجموع
الفرز	ǀǀ	٠	ǀǀ	ǀǀ	ǀǀǀ	ǀǀǀ	ǀ	ǀ	ǀ	ǀǀ	ǀ	
عدد الطلاب	٢	٠	٢	٢	٣	٣	١	١	١	٢	١	١٨

البيانات السابقة تم تبويبها في جدول إحصائي يحتوي الدرجة التي حصل عليها الطالب ، ويناظرها الصف الثاني الذي يمثل عملية الفرز (التكرار) .

والفرز عبارة عن خطوط تمثل عدد الطلاب الحاصلين على تلك الدرجة بينما نجد في الصف الثالث عدد الطلاب الحاصلين على تلك الدرجة وقد كتبت أرقاماً .

والغرض من استخدام الجدول هو تسهيل استخراج المعلومات ؛ فمثلاً :

عدد الطلاب الحاصلين على درجة أقل من(٢٦) هو : ٢+٢+٢+٣+٣= ١٢ طالباً .

تدريـــب

تسابق ٢٧ طالباً لمسافة محددة وتم تسجيل الزمن الذي استغرقه كل متسابق في قطع تلك المسافة بالدقائق فكانت النتائج كالتالي :

٨ ٨ ٥ ١٠ ٧ ٩ ٨ ٦ ٨

١٠ ٥ ٦ ٧ ٦ ٥ ٤ ٦ ٦

٥ ٦ ٧ ٥ ٩ ٦ ٨ ٨ ٧

لتبويب هذه البيانات ، نُنشئ الجدول الإِحصائي التالي :

الزمن بالدقائق	الفــرز	عدد المتسابقين
٤	|	١
٥	𝍸	٥
٦	𝍸 ||	
٧	||||	
٨	𝍸 |	
٩	||	
١٠	||	
	المجمــوع	٢٧ متسابقاً

بالاعتماد على الجدول السابق أجب عن الأسئلة التالية بعد إِكمال العمود الثالث :

أ) ما عدد المتسابقين الذين قطعوا المسافة في أقل من (٧) دقائق ؟

ب) ما الزمن الذي استغرقه أسرع متسابق ؟

جـ) ما عدد الطلاب الذين قطعوا المسافة في زمن تجاوز ٨ دقائق ؟

الجواب : أ) ١٣ طالب ب) ٤ دقائق جـ) ٤ طلاب

ملاحظة : عند استخدام الفرز كل خمسة خطــوط تسمــى رزمة 𝍸 : تكتب ٤ خطوط والخط الخامس مائل ، عدا ذلك تكتب منفردة .

تماريــن ومسائـل

[١] الجدول التالي يبيّن عدد الأهداف التي سجلها فريق كــرة قــدم في سبــع مباريات :

أ) أكمل الجدول ؛

ب) ما عدد الأهداف المسجلة في المباراة الرابعة ؟

جـ) ما النسبة المئوية للأهداف في المباراة الأولى ؟

المبـاراة	الفــرز	عـــدد الأهـــداف
١	$\vert\vert\vert\ \ \cancel{\vert\vert\vert\vert}$	
٢	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}$	
٣	$\vert\vert\vert\vert$	
٤	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}$	
٥	$\vert\vert$	
٦	$\vert\vert$	
٧	$\vert\vert\vert\vert$	
المجمـــوع		هـــدفـاً

[٢] تمثّل البيانات الآتية درجات ٢٥ طالباً في اختبار الرياضيات :

٩١	٩٠	٨٧	٨٣	٩١
٨٩	٩١	٩٤	٩٠	٨٦
٩١	٩٠	٨٧	٩٦	٩٠
٩٠	٩٠	٩٤	٨٣	٨٧
٩١	٨٧	٩١	٨٧	٩١

أ) أنشئ جدولاً إحصائياً لهذه البيانات .

ب) ما الدرجة التي حصل عليها أكبر عدد من الطلبة ؟

[٣] تمثّل البيانات التالية أوزان (١٥) طالباً لأقرب كجم :

٥١	٥٠	٤٨	٥٠	٤٨
٥١	٤٩	٥١	٤٩	٥٢
٥١	٥٠	٥٠	٥٠	٤٨

أ) ما أصغر وزن وما أكبر وزن ؟

ب) ما عدد الطلبة الذين تجاوزت أوزانهم ٥٠ كجم .

جـ) كم تكرر الوزن ٥١ كجم ؟

[٤] أحصى أحمد عدد الكتب المدرسية الموجودة بمكتبة منزله وأنشأ البيان الآتي :

نحو	رياضيات	جغرافيا	وطنية	قرآن	رياضيات
علوم	قرآن	تاريخ	تاريخ	قرآن	جغرافيا
نحو	نحو	علوم	نحو	تاريخ	نحو
تاريخ	علوم	نحو	نحو	علوم	قرآن
علوم	قرآن	رياضيات	قرآن	علوم	تاريخ

أ) قم بتبويب هذه البيانات في جدول .

ب) ما الكتاب الذي تكرر ظهوره أكثر من غيره ؟

٧ : ٢ التمثيل البياني لبيانات إحصائية

يعتبر التمثيل البياني مكملاً لعرض البيانات جدولياً وهناك طرق كثيرة لتمثيلها وسنقتصر في هذا الصف على واحدة منها ، وهي التمثيل البياني بالأعمدة .

مثال (١)

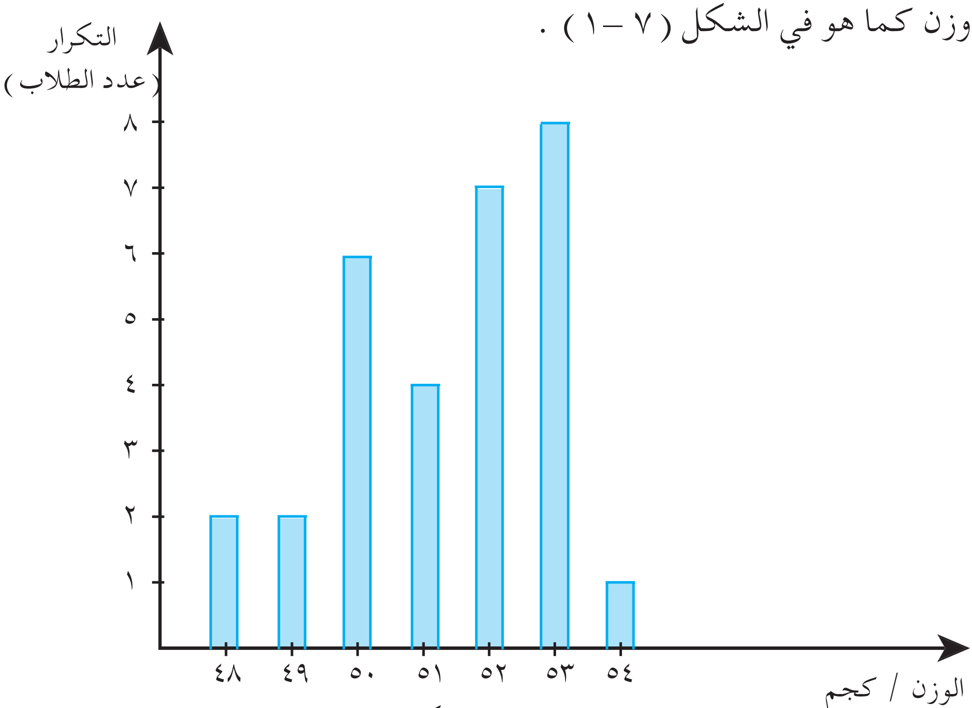
يمثل الجدول التالي أوزان (٣٠) طالباً لأقرب كيلوجرام .

الوزن / كجم	٤٨	٤٩	٥٠	٥١	٥٢	٥٣	٥٤	المجموع
عدد الطلاب	٢	٢	٦	٤	٧	٨	١	٣٠ طالباً

مثّل هذه البيانات بالأعمدة .

الحــل :

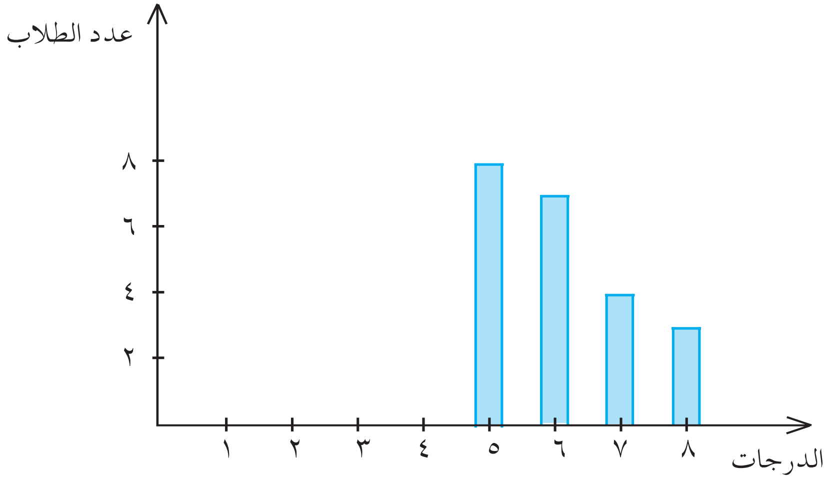
لتمثيل هذه البيانات بالأعمدة ، نحدد الأوزان على المحور السيني وتكراراتها (عدد الطلاب) على المحور الصادي بحيث نرسم كل عمود على شكل مستطيل وبين كل عمود وآخر مسافات مناسبة ومتساوية وعدد الأعمدة تساوي عدد الأوزان ، والمستطيلات قواعدها كلها متساوية وارتفاعاتها تمثّل عدد الطلاب المقابل لكل وزن كما هو في الشكل (٧ – ١) .



شكل (٧ – ١)

مثال (٢)

الشكل (٧–٢) يمثّل بيانات بالأعمدة لدرجات (٢٢) طالباً في اختبار قصير في مادة الرياضيات درجته الكاملة (١٠ درجات) :



شكل (٧ – ٢)

أجب عن الأسئلة التالية :

أ) كم عدد الطلاب الحاصلين على أعلى درجة ؟

ب) ما أدنى درجة حصل عليها الطلاب ؟

جـ) ما عدد الطلاب الواقعة درجاتهم بين (٥) ، (٧) درجات ؟

الحــل :

أ) ∵ أعلى درجة (٨) في الشكل يقابلها العدد (٣)وهو عدد الطلاب .

∴ عدد الطلاب الحاصلين على أعلى درجة = ٣ طلاب .

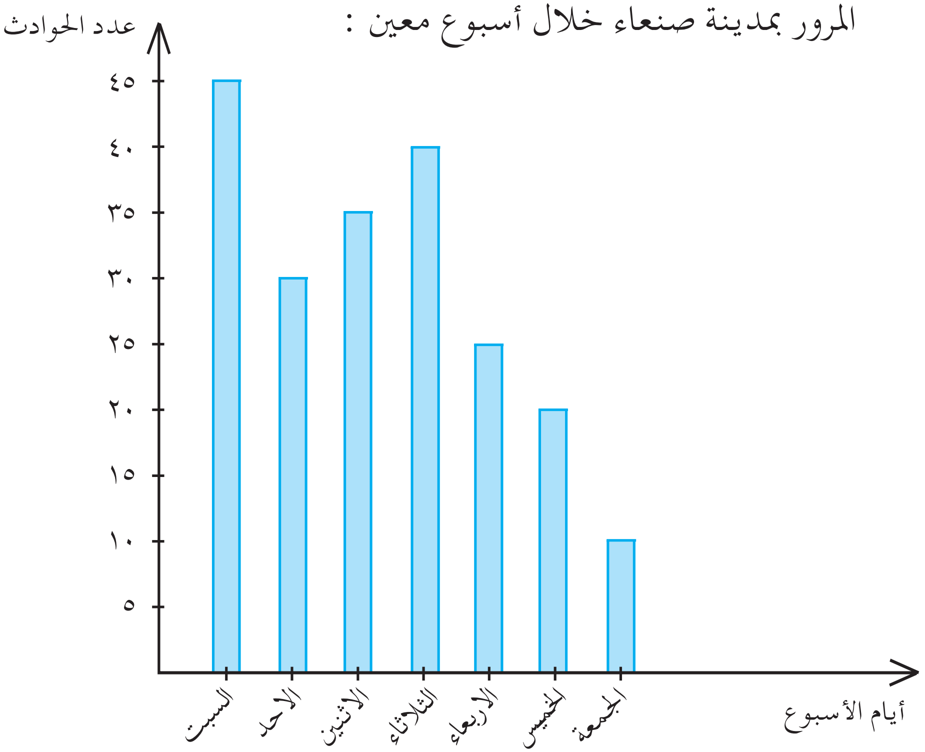
ب) أدنى درجة حصل عليها الطلاب هي ٥ درجات .

جـ) الدرجة الواقعة بين (٥) ، (٧) هي (٦) على محور الدرجات ويقابلها على المحور الآخر ٧ طلاب .

∴ عدد الطلبة الواقعة درجاتهم بين (٥) ، (٧) = ٧ طلاب .

تمارين ومسائل

[١] شكل (٧ – ٣) يبيّن عدد حوادث السيارات كما سجلها القائمون على المرور بمدينة صنعاء خلال أسبوع معين :



شكل (٧ – ٣)

بالاعتماد على الأعمدة البيانية أجب عن الأسئلة التالية :

أ) كم عدد الحوادث ليوم الاثنين ؟

ب) ما اليوم الذي حصل فيه أكثر الحوادث ؟

جـ) ما أقل عدد حوادث السيارات ؟ وفي أي يوم حصلت ؟

ء) نظِّم المعلومات المبيّنة في الأعمدة البيانية في جدول إِحصائي .

[٢] الجدول الآتي يبيّن عدد رياض الأطفال في بعض محافظات الجمهورية اليمنية لعام ٨٩ / ١٩٩٠م .

المحافظة	عدن	لحج	أبين	شبوة	حضرموت	المهرة	المجموع
عدد رياض الاطفال	١٤	٢	٧	٣	١٠	٣	٣٩

مثّل هذه البيانات بطريقة الأعمدة .

[٣] يمثّل الجدول التالي المادة الدراسية المفضّلة لدى (٩٥) طالـــب وطالبـة في الصف السابع الأساسي :

المادة المفضلة	الفرز (التكرار)	عدد الطلبة
الرياضيات	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ||	
العلوم	𝍸 𝍸 𝍸 |||	
العربي	𝍸 𝍸 𝍸	
الإنجليزي	𝍸 𝍸	
الإسلامية	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸	

أ) أكمل الجدول .

ب) أي المواد أكثر تفضيلاً لدى الطلبة ؟

ب) مثل هذا الجدول بالأعمدة.

[٤] يمثّل الجدول التالي توزيع أيام السنة على الفصول الأربعة :

الفصل	الخريف	الشتاء	الربيع	الصيف
الأيـــام	٨٨	٨٨	٩٢	٩٦

مثّل هذه البيانات بالأعمدة .

[٥] إذا كان لدينا درجات ٤٠ طالباً في اختبار رياضيات درجته (٣٠) درجة كما يلي :

٢٤	٢٥	٢٩	٢٠	٢٤	٢٣	٢٧	٢٢	٢٥	٢٣
٢٣	٢٩	٢١	٢٨	٢٥	٣٠	٢٤	٢٧	٢٠	٢٤
٢٤	٢٢	٢٧	٢٤	٣٠	٢٠	٢٩	٢٣	٢٦	٢٥
٢٠	٢٥	٢٩	٢٣	٢٨	٢٤	٢٧	٢٠	٢٥	٢٢

فأوجد ما يلي : أ) كم عدد الطلاب الحاصلين على أعلى درجة ؟

ب) ما أدنى درجة حصل عليها الطلاب ؟

جـ) اكتب هذه الدرجات في جدول ثم مثّلها بالأعمدة .

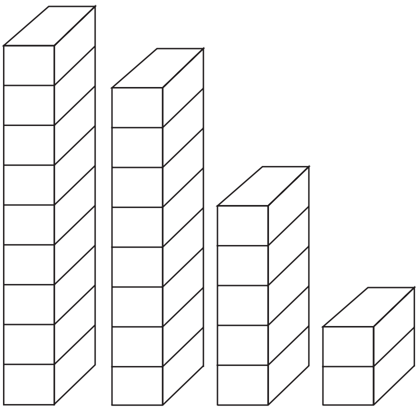
٧ : ٣ المتوســـط الحسابـــي

طُلب من (٤) طلاب حمل أكوام الكتب المبيّنة في الشكل (٧–٤) إلى مخزن المدرسة . لتوزيع هذه الكتب بين الطلاب الأربعة ، تُقسّم هذه الكتب بالتساوي بين الطلاب الأربعة .

– ما مجموع هذه الكتب ؟

– كم كتاباً يحمل كل طالب؟

– ما المتوسط الحسابي في هذه الحالة ؟



شكل (٧ – ٤)

كي تتوزع هذه الكتب بين الطلاب الأربعة يجب أن يكون عدد الكتب في كل كوم =

$$\frac{٩ + ٨ + ٥ + ٢}{٤} = \frac{٢٤}{٤} = ٦$$

مجموع الكتب

عدد الطلاب

وبالتالي فإن العدد ٦ هو المتوسط الحسابي أي عدد الكتب التي يجب أن يحملها كل طالب .

المتوسط الحسابي لمجموعة أعداد يساوي نسبة مجموع هذه الأعداد إِلى عدد عناصر المجموعة ، أي أن :

$$\text{المتوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع الأعداد}}{\text{عددها}}$$

أيّ أن المتوسط الحسابي هو عبارة عن قيمة عددية تصف مجموعة من الأعداد ككل وليس بصورة منفردة .

مثال (١) إِذا كانت أطوال ٤ طلاب لأقرب عدد صحيح هي :

١٥٦سم ، ١٦٧سم ، ١٥٥سم ، ١٧٠سم .

ما المتوسط الحسابي لأطوالهم ؟

الحل :

$$\text{المتوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع اطوال الطلبة}}{\text{عدد الطلبة}}$$

$$= \frac{١٧٠ + ١٥٥ + ١٦٧ + ١٥٦}{٤}$$

= ١٦٢سم

ملاحظة : أحياناً يطلق على المتوسط الحسابي «المعدّل» وكلاهما يعني، في الواقع ، الشئ نفسه .

مثال (٢)

المتوسط الحسابي لفريق كرة قدم ١٣ هدفاً في ٨ مباريات ، فما مجموع هذه الأهداف ؟

الحـل : المتوسط الحسابي = $\frac{\text{مجموع الأعداد}}{\text{عددها}}$

ومنها المجمـوع = المتوسط X العدد

= ١٣ X ٨ = ١٠٤

∴ مجموع الأهداف = ١٠٤ هدفاً

مثال (٣) مجموع أعداد (٦٣٠) ومتوسطها الحسابي (١٠,٥)، فكم عددها؟

الحـل : المتوسط الحسابي = $\frac{\text{مجموع الأعداد}}{\text{عدد الأعداد}}$

ومنها عدد الأعداد = $\frac{\text{مجموع الأعداد}}{\text{المتوسط الحسابي}}$

= $\frac{٦٣٠}{١٠,٥}$

عدد الأعداد = ٦٠

تماريـن ومسائـل

[١] إِذا كان دخل (٦) موظفين في الشهر يساوي (٩٣٠٠٠) ريال، ما معدّل (متوسط) دخل الموظف الواحد ؟

[٢] حصل أحمد في الامتحان النهائي على الدرجات التالية :

٨٠ ، ٧٥ ، ٩٠ ، ٨٥ بينما كان مجموع درجاته في السنة السابقة (٥٦٠) درجة لسبع مواد

أ) ما المتوسط الحسابي لدرجاته الحالية ؟

ب) ما المتوسط الحسابي لدرجاته للسنة السابقة ؟

جـ) أي من المتوسطين أكبر ؟

[٣] سجلّت الأرصاد الجوية درجات الحرارة لمدة (١٥) يوماً متتالية لإحدى مناطق الجمهورية كما يلي :

١٨	١٨	١٥	٢٥	٢١
٢١	١٩	١٧	٢١	٢٥
٢٢	٢١	٢٥	٢٥	٢٢

أوجد المتوسط الحسابي لدرجات الحرارة لهذه المنطقة خلال هذه المدة .

[٤] إذا كان المتوسط الحسابي لدرجات أحمد في اللغة الانجليزية في ثلاثة اختبارات هو (٨٧) ، وكانت الدرجتان الأولى والثانية على التوالي ٨٨، ٨٩ ، فما الدرجة الثالثة ؟

[٥] أكمل الجدول التالي :

المجموع	العدد	المتوسط
٤٢٠	٤	
٢٢,٥		٢,٥
	١١	٣٣,٣
٥٢٥		٣٥
	٣١	١٩

[٦] معدّل عدد الطلبة في الفصل في إحدى المدارس ٦٥ طالباً فإذا كان بالمدرسة ٨ فصول فما مجموع طلاب المدرسة ؟

[٧] فيما يلي عدد مخالفات المرور التي سُجلت خلال ثلاثين يوماً :

٢	١١	٦	٤	١٨	٢	٩	٣	٢	١٥
٥	١٦	١٥	١٦	٤	٩	٥	٧	٤	١٠
٥	٦	١١	١	١١	٩	٤	٨	٧	١٥

أوجد المتوسط الحسابي لعدد المخالفات في اليوم الواحد .

[٨] متوسط هطول الأمطار خلال ثلاث أيـام متتالية ٣,٥ مليمتر فإذا كان قد هطل في اليوم الأول ٣,٧ مليمتر وفي اليوم الثاني ٣,٦ مليمترات . فما كمية الأمطار التي هطلت في اليوم الثالث ؟

٧ : ٤ تماريـــن عامــة ومسائـــل

[١] الأعداد الآتية هي درجات(٢٥) طالباً في اختبار شهري درجته العظمى (١٠ درجات) :

٥	٥	٩	٨	٧
٧	٤	٧	٥	٦
٧	٨	٧	٥	٤
٥	١٠	٦	٤	٤
٨	١٠	٦	٩	٥

أ) نظم هذه البيانات في جدول إحصائي يحتوي على الدرجة ، والفرز وعدد الطلاب .

ب) ما مجموع الدرجات الكلي؟

جـ) احسب المتوسط الحسابي لهذه الدرجات

[٢] الجدول الآتي يبيّن عدد الأخطاء التي ارتكبها (٣٠) سائقاً في اختبار قيادة السيارات :

الخطأ المرتكب	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	المجمـــوع
عـدد الاخطاء (عدد السائقين)	٦	٦	٤	٤	٤	٢	٣	١	٣٠

أ) مثّل هذه البيانات بالأعمدة .

ب) ما عدد السائقين الذين ارتكبوا أكثر من (٣) أخطاء ؟

[٣] بلغت درجات بلقيس لمجموعة اختباراتها في اللغة العربية كما يلي :

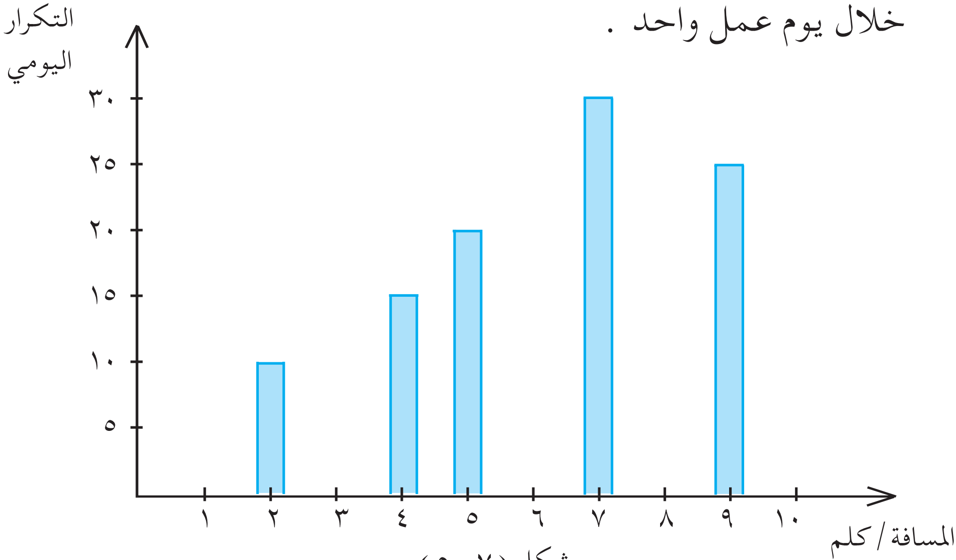
٨٨ ، ٧٠ ، ٧٥ ، ٩٨ ، ٧٤ ، ٥٣ ، ٧٢

أ) ما المتوسط الحسابي لدرجات بلقيس ؟

ب) إِذا حذف المدرس أدنى درجة (٥٣) ، فما المتوسط الحسابي الجديد ؟

جـ) أي المتوسطين أعلى ؟ وكيف تفسر ذلك ؟

[٤] الشكل (٧–٥) يبيّن المسافات لرحلات سيارة أجرة في إِحدى المدن خلال يوم عمل واحد .



شكل (٧ – ٥)

المطلوب :

أ) ما مجموع رحلات هذه السيارة اليومي (التكرار اليومي) ؟

ب) بالاعتماد على الشكل البياني السابق ، كوّن جدولاً إِحصائياً يضم المسافة (كلم) والتكرار اليومي للرحلات .

جـ) احسب المتوسط الحسابي لرحلات هذه السيارة في ذلك اليوم .

[٥] إذا كان متوسط درجات أحد الطلبة في ثلاثة اختبارات هو (٨٠ درجة) وكانت الدرجتان الثانية والثالثة على التوالي ٩٠ ، ٨٠ فما الدرجة الأولى ؟

[٦] أكمل الجدول التالي :

المجموع	العدد	المتوسط الحسابي
٥٨٢	٥	
٨٦٤		٢٨٨
	١٥	٦٣
٦٢,٢		٣١,١
	٠,٨	٥٩,٢٥

[٧] فيما يلي الأجر اليومي بالريال لعشرين عاملاً في أحد المصانع ، والمطلوب عمل جدول يحتوي الأجرة وعدد العمال، ثم مثله بالأعمدة .

٣٠٠	٤٥٠	٣٠٠	٤٥٠	٤٠٠
٥٠٠	٤٠٠	٣٥٠	٤٥٠	٣٠٠
٤٥٠	٤٠٠	٣٥٠	٥٠٠	٣٠٠
٤٠٠	٣٥٠	٣٠٠	٤٠٠	٣٠٠

٧ : ٥ اختبار الوحدة

[١] البيانات التالية تمثل عدد الأخطاء التي ارتكبها فريق كرة السلة في (٢٨) مباراة :

١	٣	٥	٦	٤	٦	٧
٧	٢	٦	٣	١	٢	١
٤	١	٢	٣	١	٣	٦
٥	٣	٤	٢	٦	٥	٢

أ) رتب هذه البيانات في جدول إحصائي حسب عدد الأخطاء وعدد المباريات .

ب) مثّل هذه البيانات بالأعمدة البيانية .

[٢] الجدول التالي يبيّن درجات اختبار شهري في اللغة العربية :

الدرجة	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	المجموع
عدد الطلاب	٣	٥	٨	٧	٤	٣	٣٠

أ) ما الدرجة التي حصل عليها أغلب الطلاب ؟

ب) ما عدد الطلاب الذين حصلوا على أقل من ٨ درجات ؟

جـ) ما نسبة الطلاب الحاصلين على الدرجة العظمى ؟

ء) أوجد المتوسط الحسابي لهذه الدرجات .

[٣] صرف أحمد وصالح في خمسة أيام المبالغ التالية (بالريال) :

ما صرفه أحمد : ٧٥ ، ٨٥ ، ٧٥ ، ٩٥ ، ٨٠

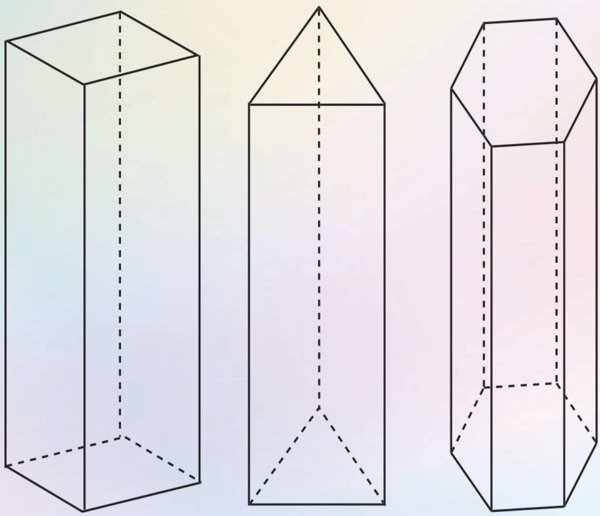
ما صرفه صالح : ٩٥ ، ٨٥ ، ٦٥ ، ٩٥ ، ٩٠

أ) أوجد متوسط ما صرفه كل واحد على حده .

ب) أيهما له أعلى متوسط في الصرف اليومي ؟

[٤] إذا كان مجموع أعداد (٨١٠) ومتوسطها الحسابي (٢٧) ، فكم عدد هذه الأعداد ؟

تم بحمد الله



الجمهورية اليمنية
المؤسسة العامة لمطابع الكتاب المدرسي

www.e-learning-moe.edu.ye